Прямая Эйлера

Данный сюжет является естественным развитием результатов, полученных нами в предыдущих главах. Главным героем этой главы будет прямая HO, проходящая через ортоцентр и центр описанной окружности произвольного треугольника. Как мы увидим, на эту прямую попадут и другие замечательные точки в треугольнике, связанные не только с высотами и серединными перпендикулярами, но и с окружностью девяти точек, с медианами и с биссектрисами. Тем самым мы задействуем все ключевые отрезки в треугольнике: высоты, биссектрисы, серединные перпендикуляры, медианы, средние линии.

Прямая Эйлера наряду с окружностью девяти точек является одним из фундаментальных объектов в геометрии, поэтому входит в обязательную программу физико-математических школ и кружков. Однако, как и в случае с окружностью девяти точек, прямая Эйлера изучается уже после того, как пройдена основная программа по геометрии, с привлечением мощной техники. В то же время с прямой Эйлера естественно связан ряд конструкций геометрии 7 класса.

Мы предлагаем подход, при котором знакомство с прямой Эйлера происходит в конце 7 класса после освоения первых шести параграфов учебника Погорелова. В том числе предполагаются известными

- признаки и свойства параллелограмма;
- теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках;
- теорема о пересечении медиан в треугольнике.

Отметим также, что предлагаемый нами путь отнюдь не искусственный! Представленные ниже конструкции вскрывают связь между фундаментальными объектами в треугольнике, причем делают это с неожиданной стороны.

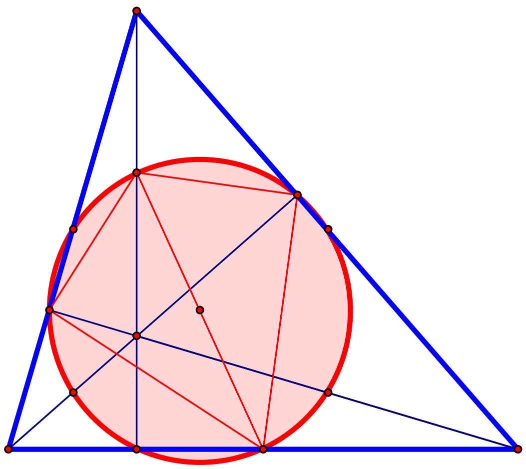
Скажем также несколько слов об истории открытия прямой Эйлера. Это было сделано самим Эйлером в работе под названием « Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum» [1], которая была опубликована в 1767 году. Нельзя не упомянуть о стиле рассуждений Эйлера. Мы с вами привыкли к рассуждениям геометрического характера: для доказательства утверждений используются фундаментальные свойства геометрических фигур. Эйлер же использовал аналитический подход [2]. По всей видимости, его целью была демонстрация мощи и универсальности такого подхода.

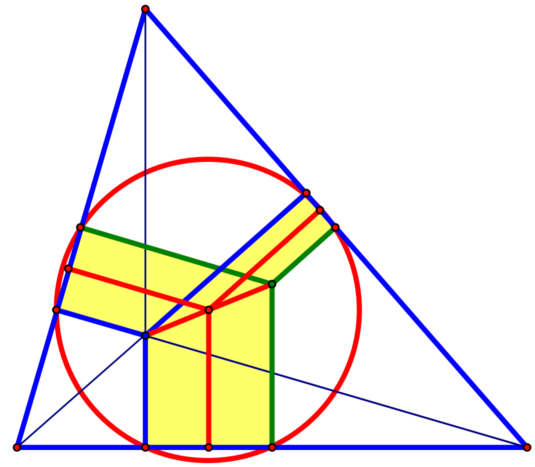
На всем протяжении этой главы сохранены стандартные обозначения, принятые нами ранее. Напомним их и введем несколько новых.

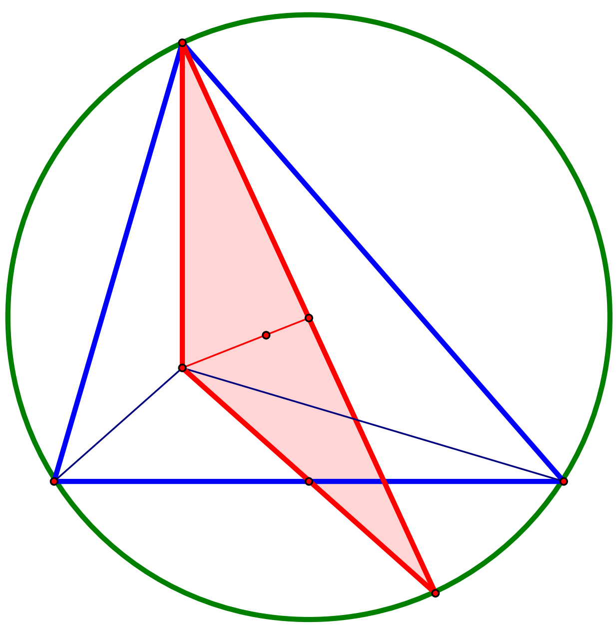
[1] В вольном переводе с латыни получается «О простом решении сложных геометрических задач». В свободном доступе имеется перевод этой статьи на английский.

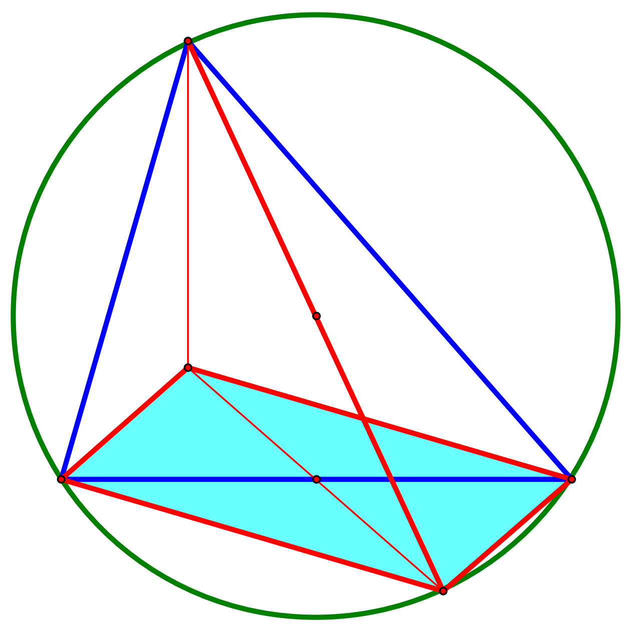
[2] Грубо говоря, он явно вычислил, что несколько замечательных точек попадают на одну прямую, используя в основном алгебраический аппарат.

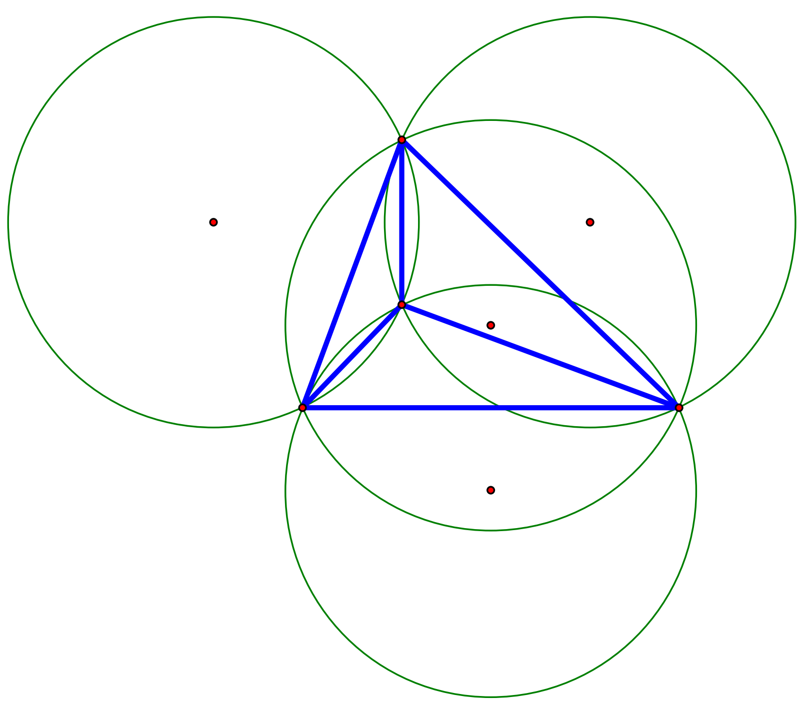
- M_A, M_B, M_C — середины сторон треугольника;
- H_A, H_B, H_C — основания высот;
- H, M, E, O — точки пересечения высот, медиан и центры окружности Эйлера и описанной окружности соответственно;
- E_A, E_B, E_C — середины отрезков, соединяющих вершины треугольника с точкой H.

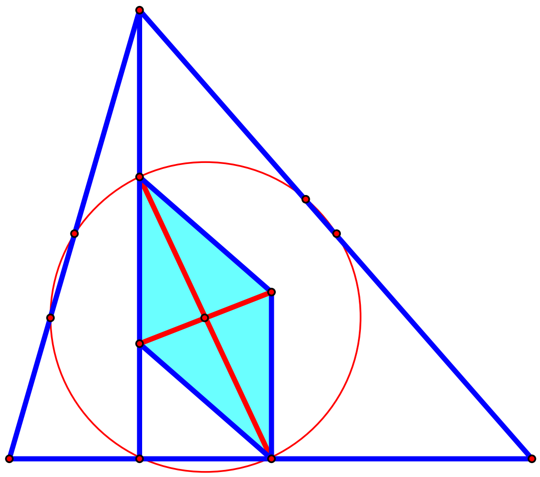


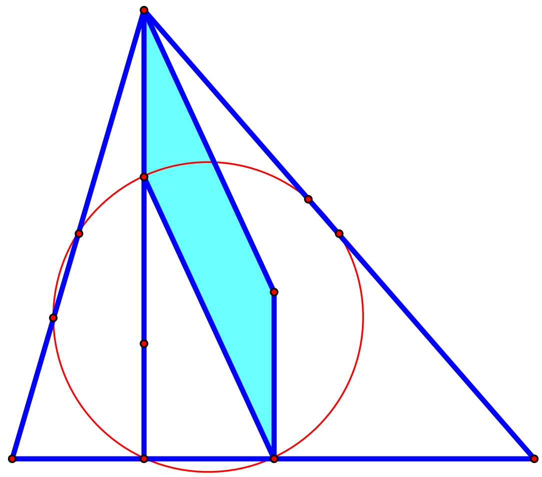


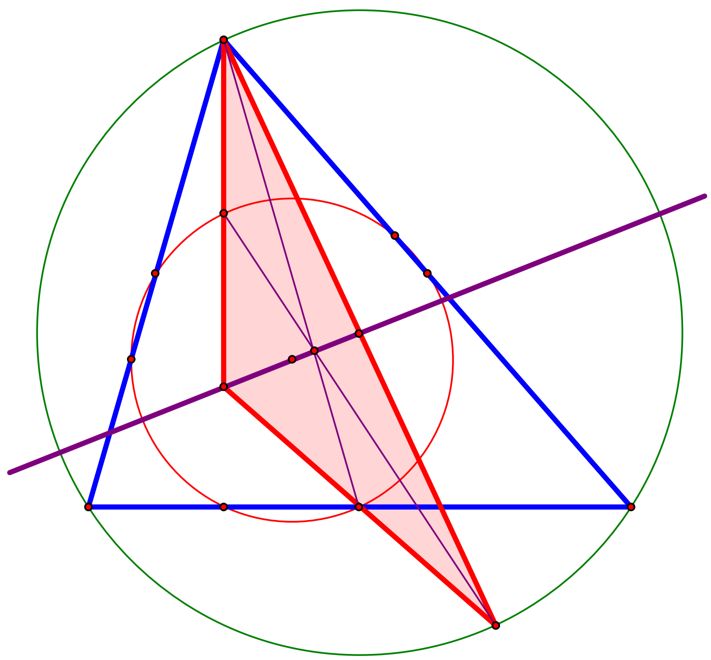


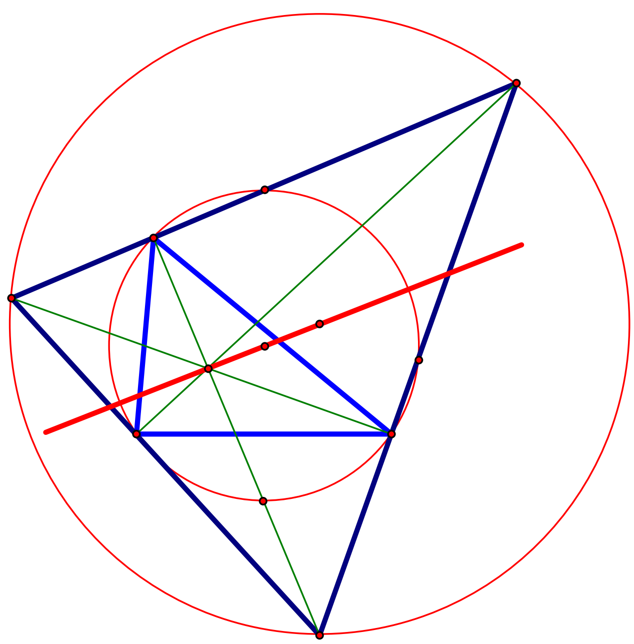












1.1 Центр окружности Эйлера

Получив замечательный результат о существовании окружности девяти точек, мы вправе задать естественный вопрос: что можно сказать о центре этой окружности? Его мы будем обозначать через E.

Начнем с эксперимента. Заметим, что окружность Эйлера проходит через середины сторон треугольника, а с этими точками естественным образом связан центр описанной окружности треугольника. Поэтому имеет смысл включить его в наше рассмотрение.

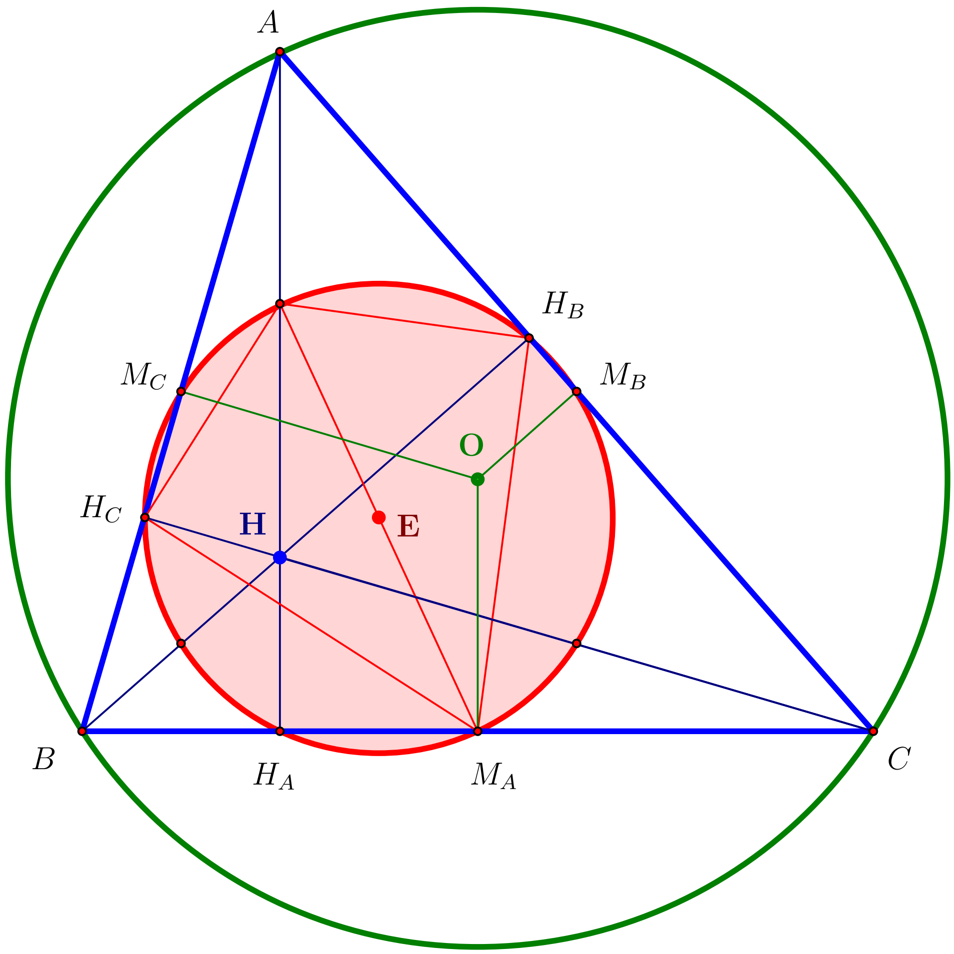


Рис. 1.1: Точки E, H и O

Что можно сказать о взаимном расположении точек H, E и O?

Гипотеза 1.1.
а) Точки H, E, O лежат на одной прямой.
б) Точка E являются серединой отрезка HO.

Как доказать эту гипотезу? Нужно как-то связать точки H и O с окружностью Эйлера и ее центром. O есть точка пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через их середины. Высоты, пересекающиеся в точке H, также перпендикулярны сторонам треугольника, а отрезки H_AM_A, H_BM_B и H_CM_C — хорды окружности Эйлера (см. рис. 1.2).

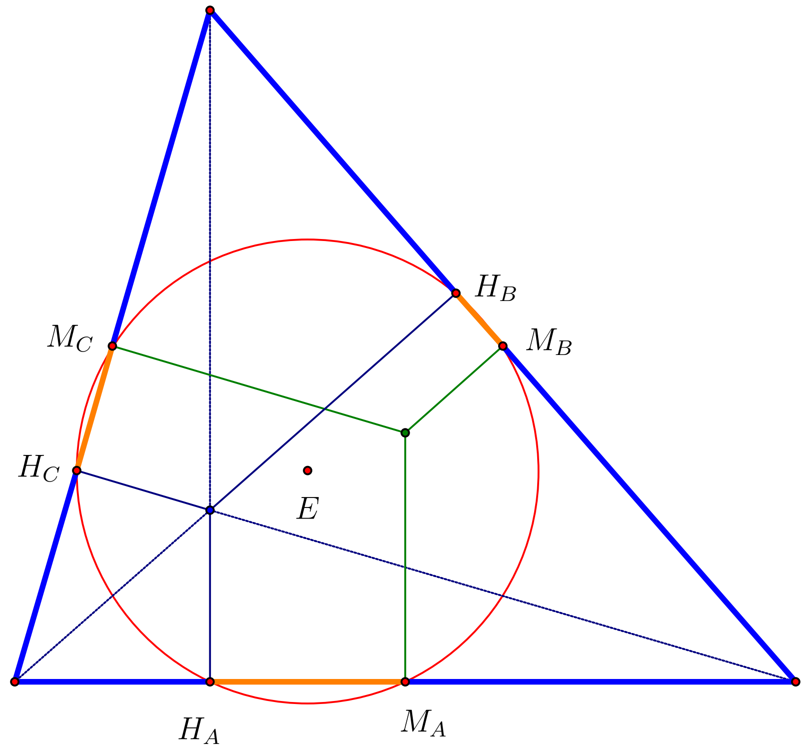


Рис. 1.2: Хорды окружности девяти точек

Задача 1.1. Докажите гипотезу 1.1 (см. рис. 1.3).

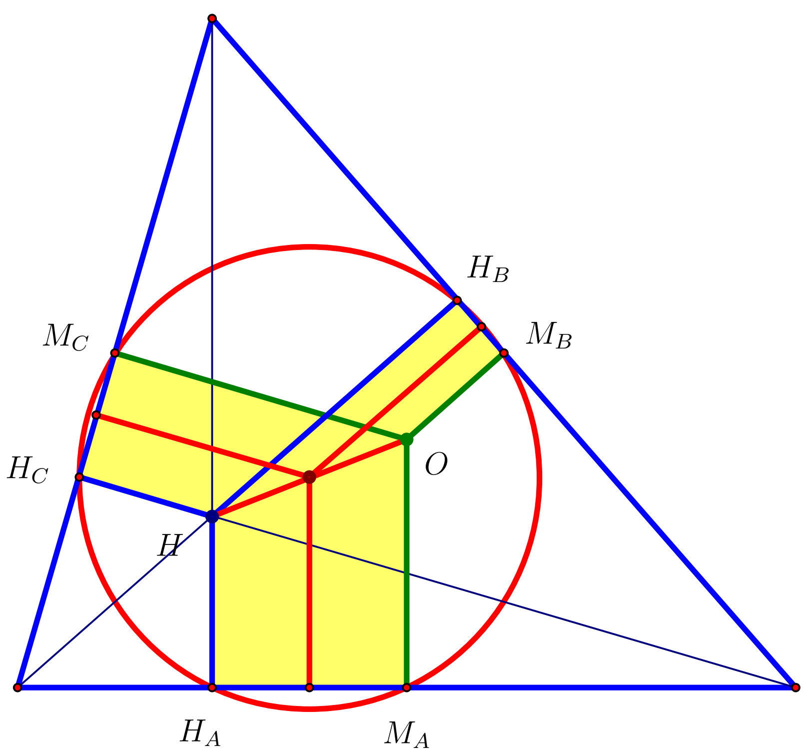


Рис. 1.3: Точки H, E, O лежат на одной прямой

1.2 Параллелограммы Эйлера

С точкой E связана еще одна замечательная конструкция.

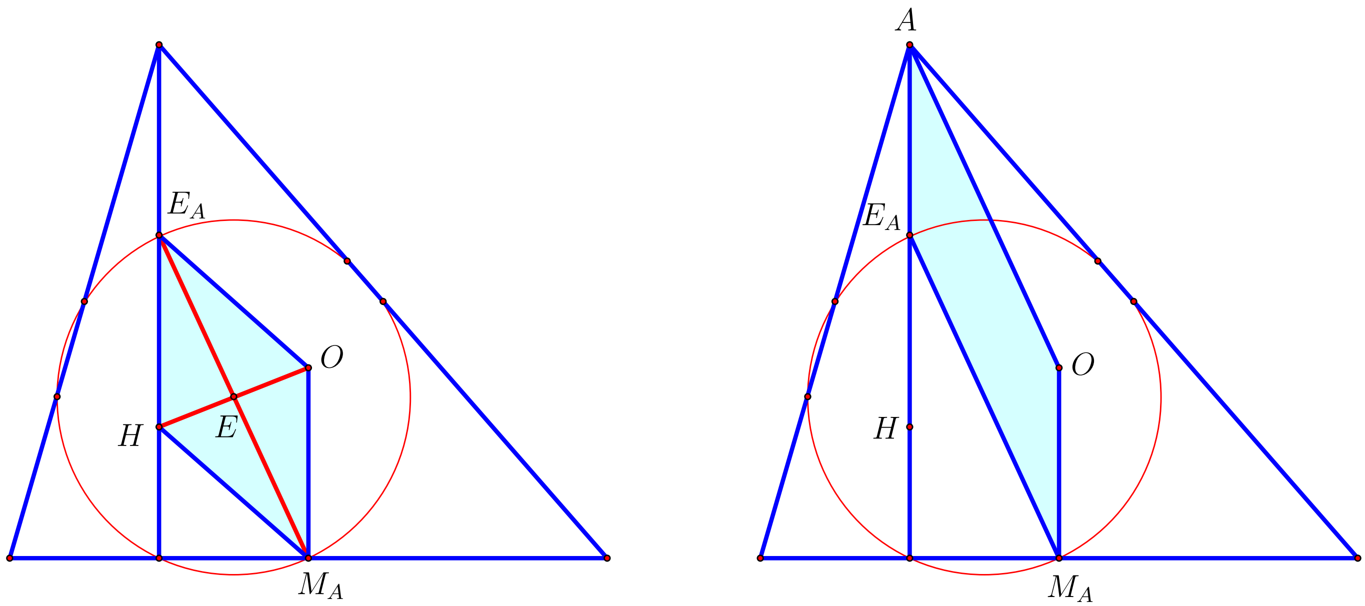


Рис. 1.4: Параллелограммы Эйлера

Задача 1.2. Докажите, что четырехугольник HE_AOM_A является параллелограммом (см. рис. 1.4).

Задача 1.3. Докажите, что четырехугольник E_AAOM_A является параллелограммом (см. рис. 1.4).

Эти параллелограммы мы будем называть первым и вторым параллелограммом Эйлера соответственно. Используя их, можно доказать некоторые замечательные факты, связанные с окружностью девяти точек. Остановимся на двух из них.

Задача 1.4. Докажите, что $AH = 2 \cdot OM_A$.

Задача 1.5. Докажите, что $R = 2 \cdot R_E$, где R — радиус описанной окружности, а R_E — радиус окружности девяти точек.

Результат задачи 1.5 для нас вполне ожидаем, как показывает рисунок 1.5. Действительно, зеленый треугольник «в два раза меньше» синего, поэтому его описанная окружность «в два раза меньше» описанной окружности синего. А зеленая окружность как раз является окружностью девяти точек синего треугольника! Такие наглядные соображения формализуются с помощью понятия *гомотетии*. О гомотетии и различных ее применениях пойдет речь в главе **??**.

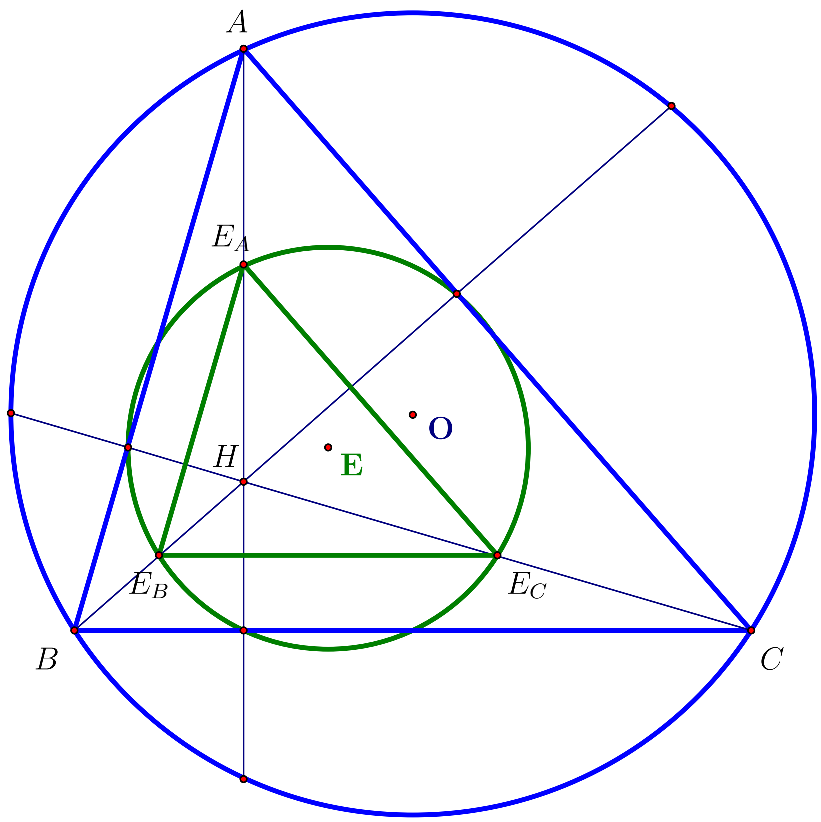


Рис. 1.5: $\triangle ABC$ «в два раза больше», чем $\triangle E_AE_BE_C$

Теперь мы готовы включить в наши исследования медианы треугольника.

1.3 Точка пересечения медиан треугольника

С серединами сторон в треугольнике связаны не только серединные перпендикуляры, но и медианы. Нам также известно, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке, которую мы будем обозначать через M. Кроме того, мы знаем, что точка M делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины.

Естественно спросить, связана ли как-то точка пересечения медиан с исследуемыми нами конструкциями?

Наблюдение, представленное на рисунке 1.6, показывает, что да!

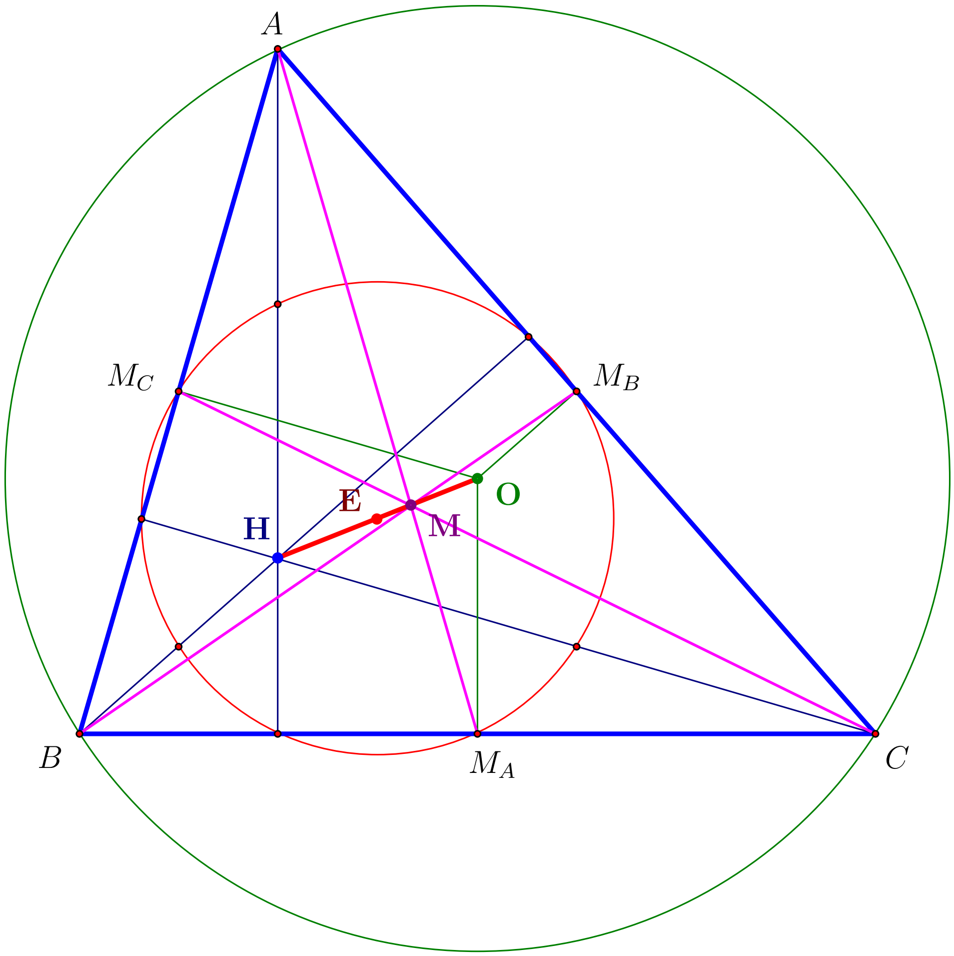


Рис. 1.6: Точка M и прямая HO

Гипотеза 1.2. *Точки H, M, O лежат на одной прямой.*

Следующий естественный вопрос: в каком месте отрезка HO расположена точка M? Прямой подсчет [3] позволяет сделать следующее предположение

Гипотеза 1.3. *Точка M делит отрезок HO в отношении $2 : 1$, считая от точки H.*

Как можно доказать гипотезы 1.2 и 1.3? За что зацепиться? Если говорить о гипотезе 1.2, то существует множество способов доказательства того, что некоторые точки лежат на одной прямой. Какой из них выбрать? Подсказку даст гипотеза 1.3. Посмотрим внимательнее на сформулированное в ней предположение: точка M делит отрезок HO в отношении $2 : 1$, считая от вершины. Где вы встречали такое отношение? Медианы треугольника и точка их пересечения!

Гипотеза 1.4. *Существует треугольник с вершиной в точке H, одной из медиан которого является отрезок HO. Точка M будет точкой пересечения медиан этого треугольника.*

[3] Проведенный, например, в Живой геометрии, где можно не только рисовать, но и считать длины отрезков и меры углов.

Отметим, что искомый треугольник должен быть как-то связан с точками H и O. Такой треугольник у нас уже появлялся в главе **??**! Речь идет о треугольнике AHA'.

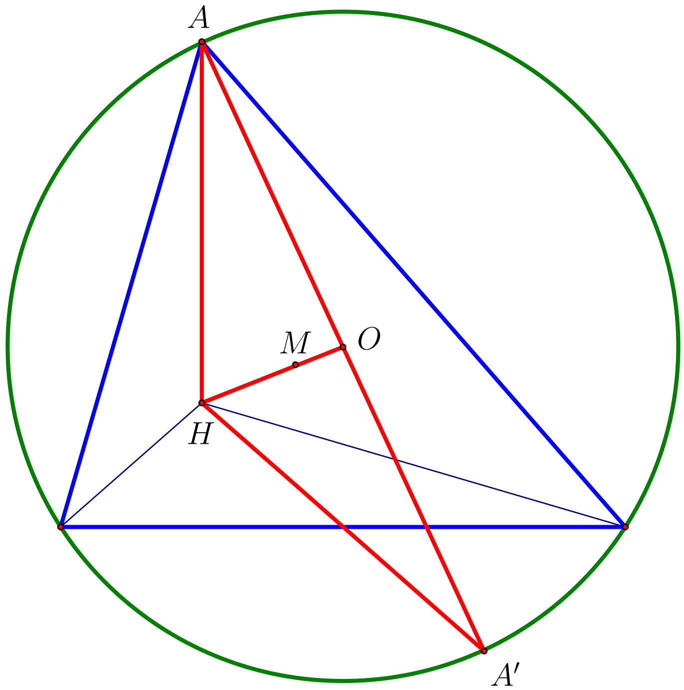


Рис. 1.7: Треугольник AHA'

Обратим внимание на вторую медиану этого треугольника.

Задача 1.6. Докажите, что отрезок AM_A также является медианой треугольника AHA' (см. рис. 1.8).

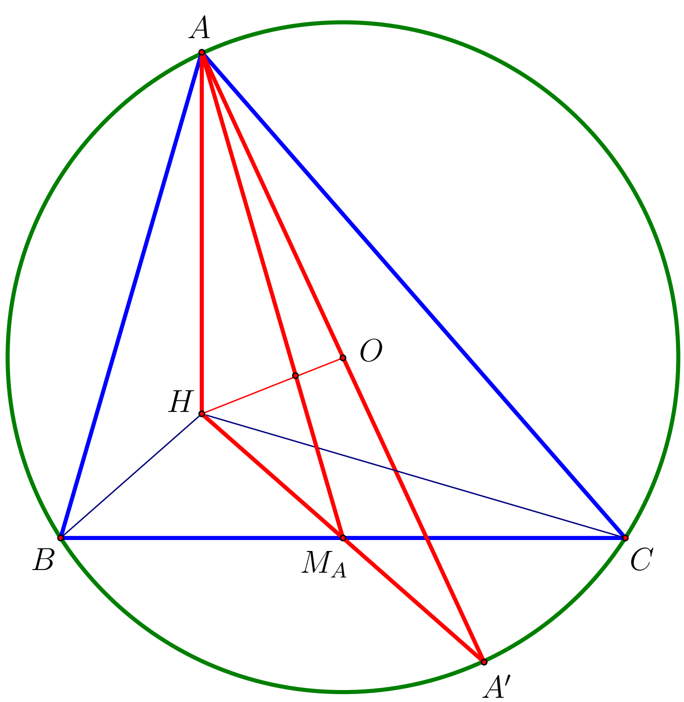


Рис. 1.8: AM_A — медиана двух треугольников

Теперь мы готовы перейти к доказательству гипотезы 1.4 и, тем самым, гипотез 1.2 и 1.3.

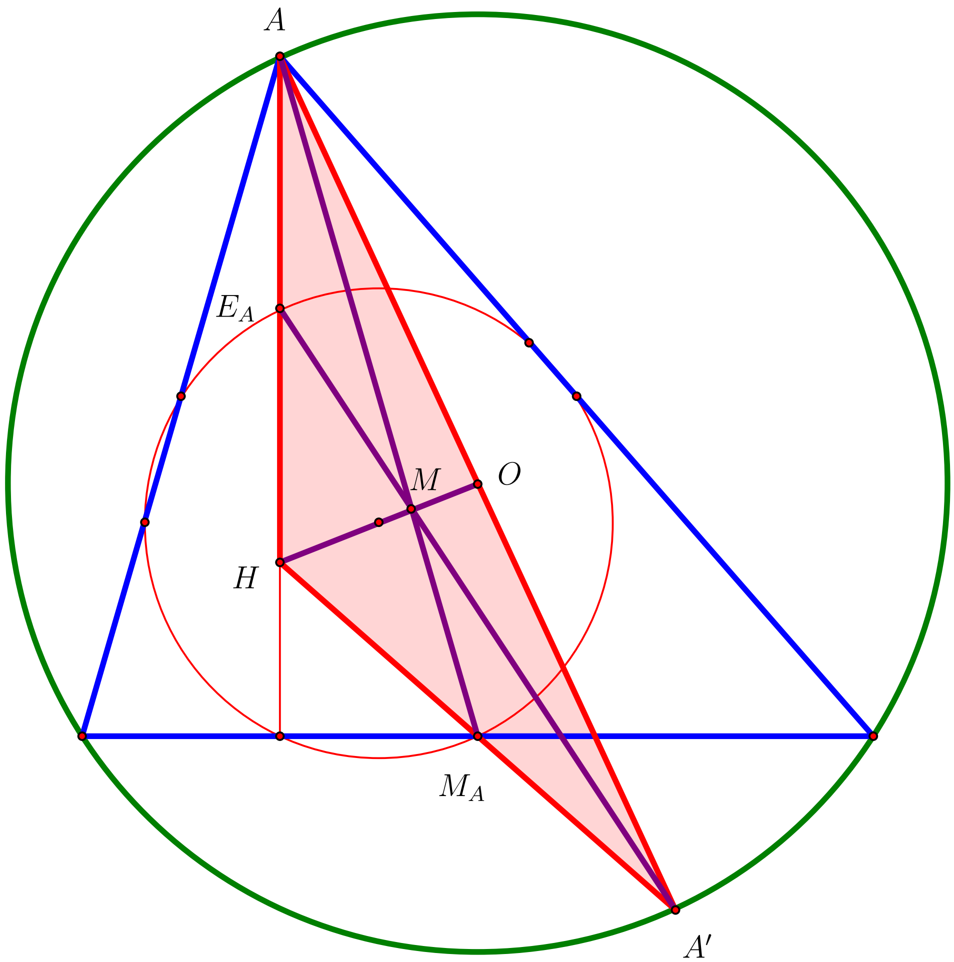


Рис. 1.9: $M \in (HO)$

Задача 1.7. Докажите гипотезы 1.4, 1.2 и 1.3.

Таким образом из известных нам замечательных точек в треугольнике в стороне от прямой Эйлера остались только точки, связанные с биссектрисами, а именно, I, I_A, I_B, I_C.

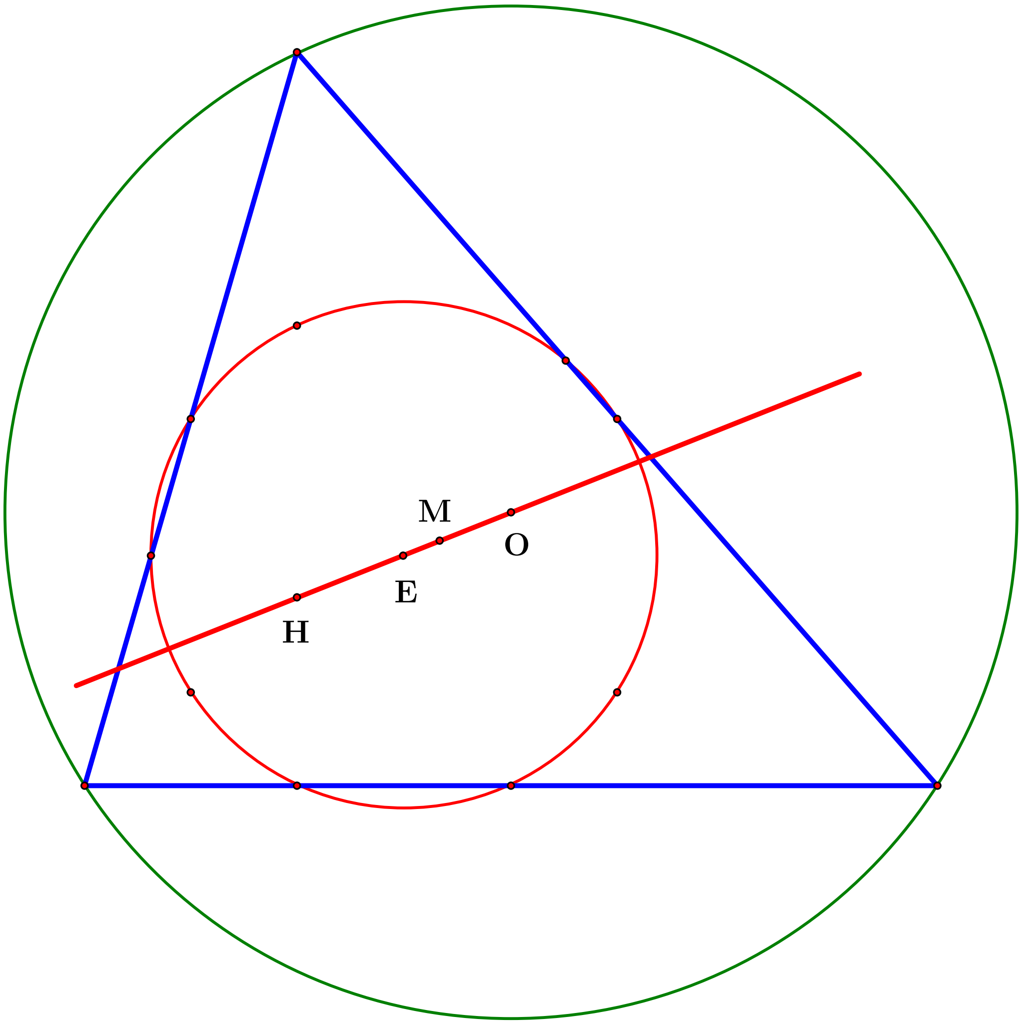


Рис. 1.10: Прямая Эйлера

1.4 Биссектрисы и прямая Эйлера

Мы выяснили, что между биссектрисами и высотами существует определенная «двойственность». Биссектрисы и высоты произвольного треугольника ABC оказываются высотами и биссектрисами треугольников $I_AI_BI_C$ и $H_AH_BH_C$ соответственно.

Теперь рассмотрим прямую IO и попробуем связать ее с треугольником $I_AI_BI_C$ (см. рис. 1.11).

Задача 1.8. Докажите, что прямая IO является прямой Эйлера треугольника $I_AI_BI_C$.

Отсюда, в частности, следует замечательный факт: точки I, O, O_I, где O_I — центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$, лежат на одной прямой (см. рис. 1.11).

С точкой I естественно связан не только треугольник $I_AI_BI_C$, ортоцентром которого она является. Речь идет о треугольнике $A_1B_1C_1$, образованном точками касания сторон треугольника ABC с вписанной в него окружностью. Для треугольника $A_1B_1C_1$ точка I является центром описанной окружности.

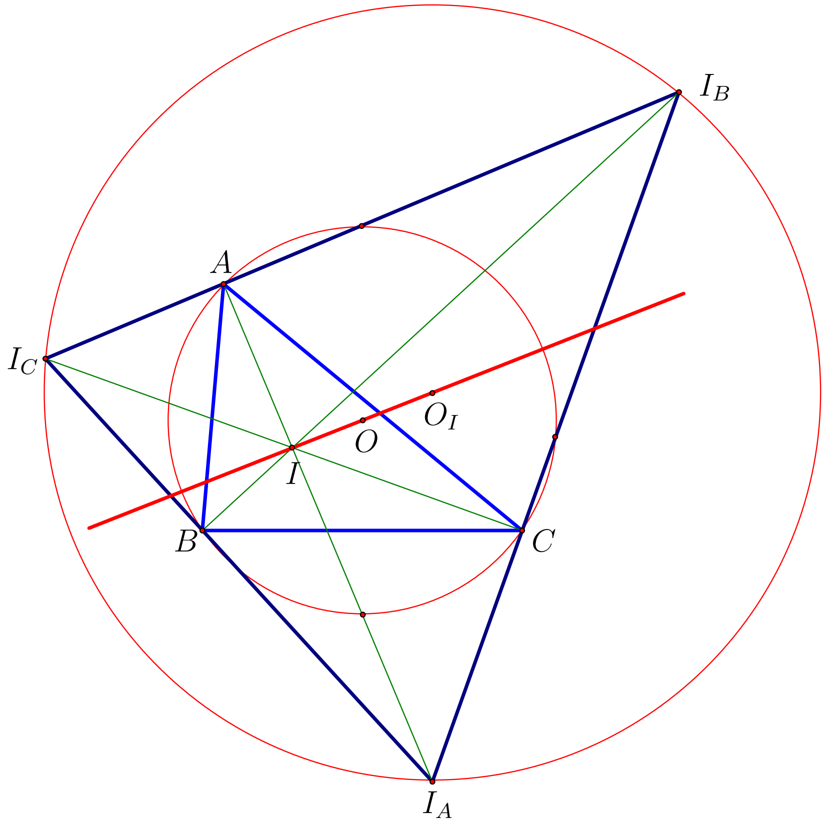


Рис. 1.11: Прямая IO и точка O_I

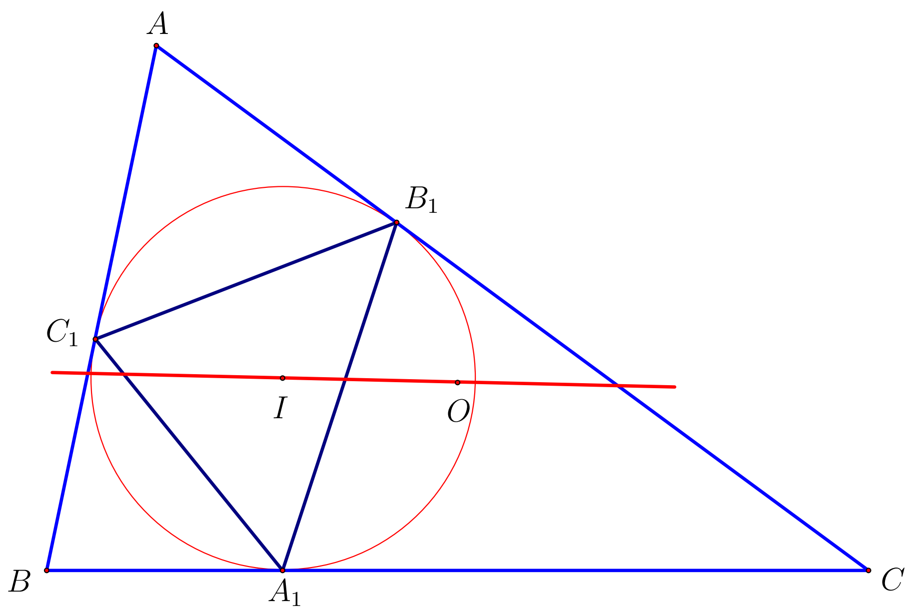


Рис. 1.12: Прямая IO и треугольник $A_1B_1C_1$

Оказывается, что прямая IO будет прямой Эйлера треугольника $A_1B_1C_1$! Это, в частности, означает, что у треугольников $I_AI_BI_C$ и $A_1B_1C_1$ одна и та же прямая Эйлера — IO. Более того, на этой прямой лежат другие, замечательные точки, связанные в том числе с W-треугольниками и не только.

1.5 Глаз дракона

Обратим внимание на треугольники, которые естественно связаны с точкой H: ABH, BCH и ACH (вместе с ABC они образуют конфигурацию, которая и дала имя данному разделу). Эти треугольники нам уже встречались в задаче **??**.

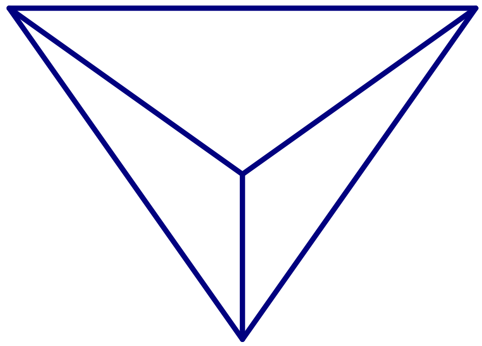


Рис. 1.13: Глаз дракона

Задача 1.9. Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников ABC, ABH, BCH и ACH равны (см. рис. 1.14).

Задача 1.10 (*)**.** Докажите утверждение, обратное к утверждению задачи 1.9.

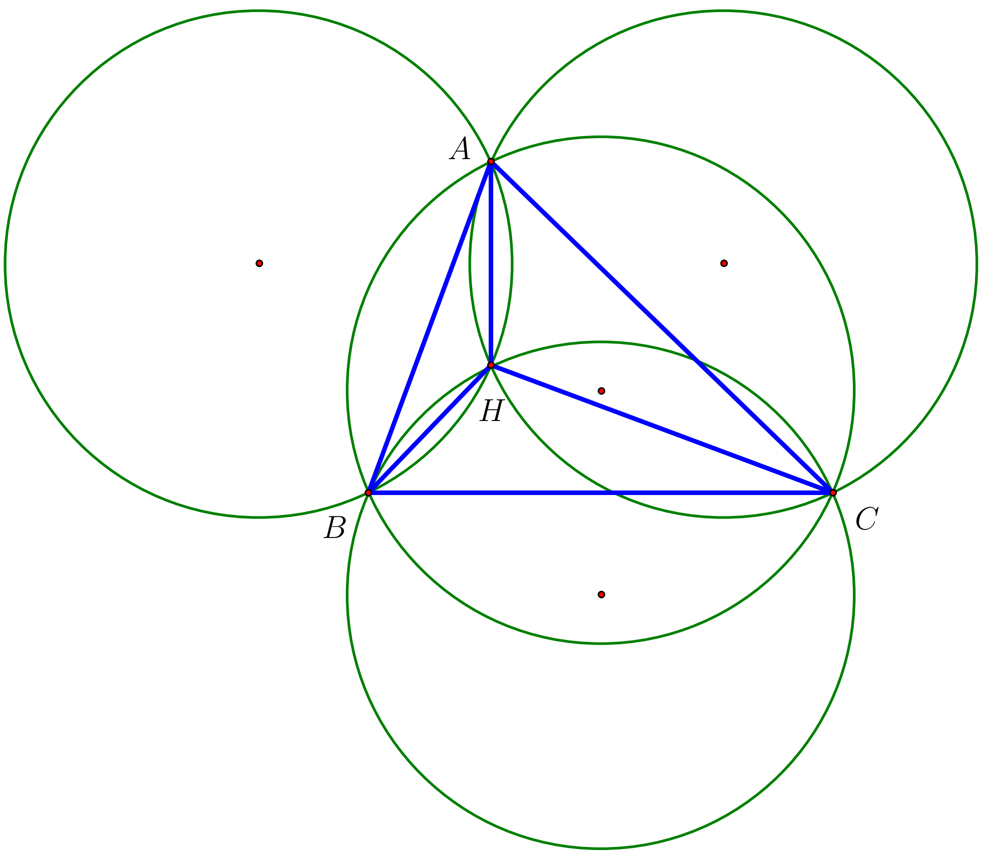


Рис. 1.14: Описанные окружности четырех треугольников

Задача 1.11. Докажите, что прямые Эйлера треугольников ABC, ABH, BCH и ACH пересекаются в одной точке (см. рис. 1.15). Что это за точка?

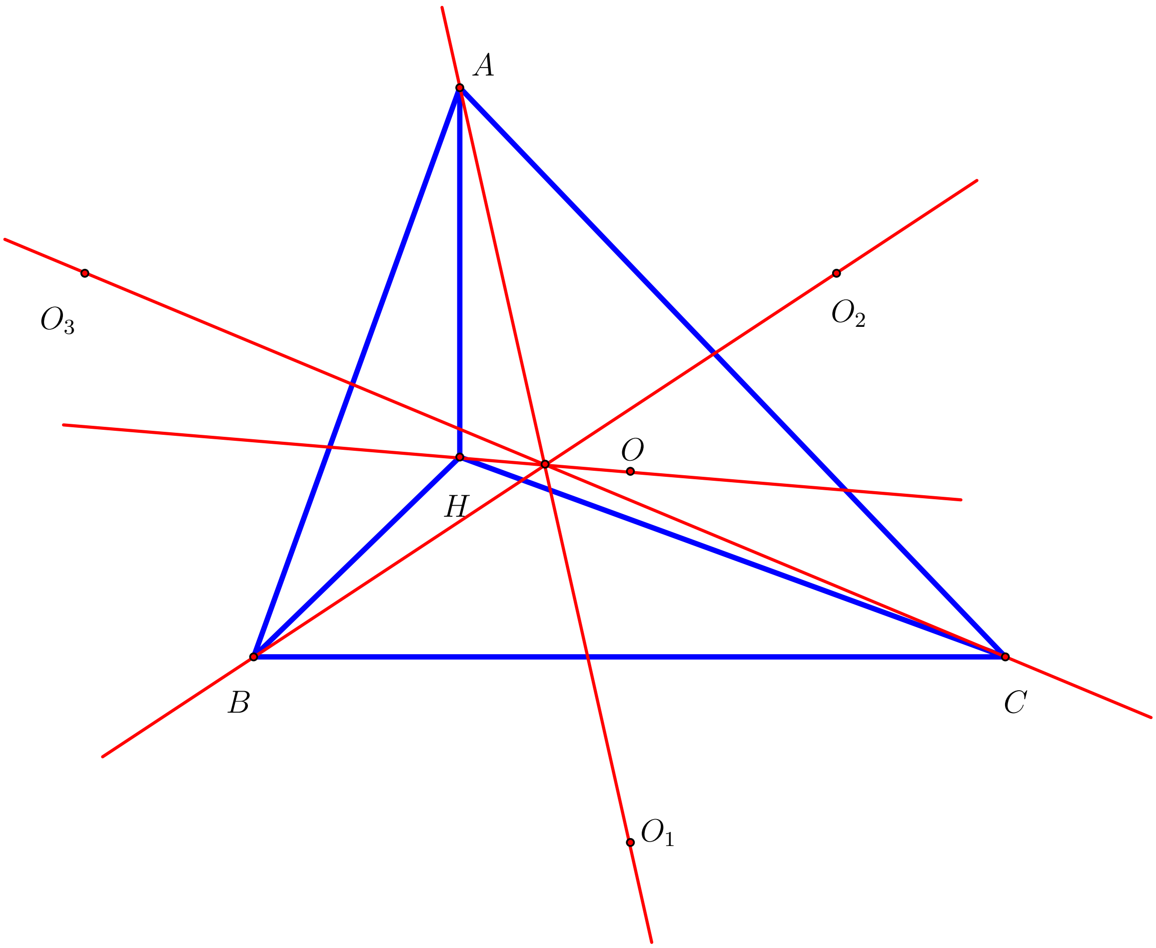


Рис. 1.15: Прямые Эйлера четырех треугольников