Прямые общего положения

Идеи, часто встречающиеся в задачах про прямые на плоскости:

- Раскраска частей плоскости в два цвета.
- Подсчёт чего-то двумя способами.
- Посмотреть на картинку «издалека» (циклически упорядочить прямые по их наклону, взять окружность большого радиуса и рассмотреть высекаемые дуги).
- Когда какая-то прямая двигается, полезно различать две полуплоскости между собой (одна сторона — «волосатая», другая — «гладкая») и следить за тем, что происходит с каждой из них. Ключевое соображение: если точка на плоскости была на гладкой стороне, а потом попала на волосатую, значит, в какой-то момент она бывала на прямой.

Ещё важен бывает принцип крайнего (хотя это скорее касается комбинаторно-геометрического аспекта этого сюжета, тут же скорее рассматривается чисто комбинаторный аспект). Имеет смысл знать в лицо пару конкретных конфигураций.

1. На плоскости проведены n прямых общего положения (то есть никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке).
(a) Сколько получилось точек пересечения?
(b) Сколько получилось областей, на которые эти прямые поделили плоскость?
(c) Сколько среди этих областей неограниченных?

2. На плоскости проведены n прямых общего положения. Рассмотрим части, на которые эти прямые разбивают плоскость. Через K обозначим число частей, являющихся треугольниками.
(a) Докажите, что $K \geqslant (2n-3)/3$ при $n \geqslant 3$.
(b) Для всех n приведите пример, в котором $K = n-2$.

3. Несколько прямых, никакие две из которых не параллельны, разрезают плоскость на части. Внутри одной из этих частей отметили точку A. Докажите, что точка, лежащая с A по разные стороны от всех данных прямых, существует тогда и только тогда, когда часть, содержащая A, неограничена.

4. На плоскости проведено n прямых общего положения. Среди частей, на которые они разбивают плоскость, есть часть, ограниченная p прямыми, и есть часть, ограниченная q прямыми. Докажите, что $p+q \leqslant n+4$.

5. В окружность вписан 2025-угольник. Из каждой его вершины опустили перпендикуляр на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что хотя бы у одного из перпендикуляров основание попадёт на сторону (а не на её продолжение).

6. Плоскость разбита на части N прямыми общего положения. Докажите, что в этих частях можно расставить ненулевые не превосходящие по модулю N целые числа так, чтобы сумма чисел в каждой полуплоскости относительно любой прямой была нулевой.

7. На плоскости проведены 2025 прямых общего положения. Улитка Турбо находится в одной из точек пересечения этих прямых. Она начинает ползти по прямым, каждый раз поворачивая на новую прямую в момент прохождения через точку пересечения любых двух прямых. Может ли найтись такой отрезок прямой, который Турбо проползет в противоположных направлениях?

8. На плоскости проведено $n \geqslant 3$ прямых общего положения. Докажите, что существует n-звенная несамопересекающаяся ломаная, такая, что на каждой прямой лежит ровно одно звено этой ломаной.

9. На плоскости проведены $n > 2$ прямых общего положения. Эти прямые разрезали плоскость на несколько частей. Какое **(a)** наименьшее; **(b)** наибольшее количество углов (т.е. частей, ограниченных двумя лучами) может быть среди этих частей?

10. Несколько прямых общего положения разделили плоскость на части. Докажите, что в эти части можно расставить положительные числа так, чтобы для каждой прямой суммы чисел по обе стороны от неё были равны.