Алгебраические преобразования в ТЧ

1. Числа x, y и z таковы, что все три числа $x+yz$, $y+zx$ и $z+xy$ рациональны, а $x^2+y^2=1$. Докажите, что число xyz^2 также рационально.

2. Найдите все действительные числа x такие, что оба числа $x+\sqrt{3}$ и $x^2+\sqrt{3}$ — рациональные.

3. Число x таково, что среди четырёх чисел $x-\sqrt{2}$, $x-1/x$, $x+1/x$, $x^2+2\sqrt{2}$ ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

4. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству $a^3b+ab^3+2a^2b^2+2a+2b+1=0$. Докажите, что $1-ab$ — квадрат рационального числа.

5. Рациональные числа a, b и c таковы, что выполняется следующее равенство: $\dfrac{1}{a+bc}+\dfrac{1}{b+ac}=\dfrac{1}{a+b}$. Докажите, что число $\sqrt{\dfrac{c-3}{c+1}}$ рационально.

6. Пусть n — натуральное число. Докажите, что если число $4n+1-\sqrt{8n+1}$ — целое, то оно является удвоенным квадратом натурального числа.

7. Изначально на доску выписали числа $1-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$. Каждую минуту с доски стираются все три написанных на ней числа x, y и z, а вместо них на доску записываются числа x^2+xy+y^2, y^2+yz+z^2, z^2+zx+x^2. Могут ли в некоторый момент все три числа на доске оказаться рациональными?