Лицей “Вторая школа”
кафедра физики

Учебное пособие

Механика

Москва
2016

Арабули Г.З., Стасевич Е.М. **Механика**

Учебное пособие для школ. Лицей “Вторая школа”, кафедра физики, 2016 г.

Учебное пособие представляет собой конспект части курса элементарной физики, читаемого в Лицее “Вторая школа”. Авторы рекомендуют использовать учебное пособие в качестве дополнения к классическим учебникам.
Излагаются основы кинематики и динамики материальной точки, динамики твердого тела, законов сохранения импульса, энергии и момента импульса, гармонических колебаний и механики сплошной среды на примере гидродинамики идеальной жидкости.
Большое внимание уделено математической строгости в изложении теории, поэтому изучение данного пособия потребует от читателя базовых знаний в векторной алгебре и теории дифференциального и интегрального исчисления.
Предназначено для учеников и учителей физиком-математических школ, а так же для всех читателей, желающих углубить свои познания в механике.

Авторы благодарят учеников 9-ых классов Лицея “Вторая школа” 2014-2016 уч. года за ценные замечания, советы и вдохновение, без которого данное учебное пособие не появилось.

Оглавление

Предисловие

Глава 1

Введение

Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов.

Исаак Ньютон

Пожалуй, из всех разделов физики механика является одновременно самым наглядным и фундаментальным. Если с наглядностью и так все понятно, то с фундаментальностью могут быть вопросы. В дальнейшем, при изучении различных разделов физики, мы будет использовать законы механики как само собой разумеющееся. Поэтому можно сказать, что механика наряду с математикой является фундаментом на котором будет построена вся физика, а на самом деле, для любой точной или естественной науки.

1.1 Разделы механики

Прежде чем приступать к изучению механики, нам нужно разобраться, а что это за наука и для решениях каких задач она применяется.

Определение 1.1 ***Механическое движение*** *- изменение положения тела относительно других тел с течением времени.*

Определение 1.2 ***Механика*** *- наука изучающая законы механического движения тела.*

Механика работает только с ***моделями*** реальных объектов и явлений, впрочем это можно сказать и про физику в целом. Создание модели это один из важнейших этапов решения реальной задачи, в нашем учебники будут разбираться некоторые простые механические модели:

- Материальная точка

- Абсолютно твердое тело
- Абсолютно упругое тело
- Идеальная жидкость

Эти модели являются достаточно простыми и стандартными, и зачастую они будут возникать естественным образом. Однако, далеко не всегда так очевидно какие факторы нужно учитывать при создании модели (и как учитывать), а какими можно пренебречь. Особенно сложные модели встречаются на стыке разных дисциплин, таких как физика, биология, геология, химия, и т.д. Модели в механике будут куда более простыми, однако и с ними нужно быть крайне внимательным.
Механику можно разделить на два раздела: кинематика и динамика.

Определение 1.3 ***Кинематика*** - *раздел механики, изучающий движение тела без выяснения причин.*

Определение 1.4 ***Динамика*** - *раздел механики, изучающий причину движения тела.*

Можно сказать, что динамика отвечает за создание физической модели и ставит задачу для кинематики. Согласитесь, было бы глупо если мы бы смогли поставить задачу, но не смогли бы ее решить, и именно поэтому мы начнем сначала с кинематики.

1.2 Задачи механики

Глобально все задачи, возникающие в механике можно будет разделить на два типа:

Определение 1.5 ***Основная (прямая) задача механики*** - *определять положение движущегося тела в любой момент времени.*

Для решения этой задачи нам нужны будут начальные данные и силы действующие на тела. Таким образом, можно сказать, что механика занимается предсказанием будущего по начальным условиям.

Определение 1.6 ***Обратная задача механики*** - *определить силы действующие на тело, если известно положение его в любой момент времени.*

Обратная задача очень важна и часто встречается в реальной жизни (например, вы сняли на камеру полет самолета, а вам нужно определить мощность двигателя), хоть значительно проще прямой (основной).

Из основной задачи механики выходит философский парадокс который получил название **детерминизм Лапласа**: пусть в какой-то момент времени всемогущая машина знает положения всех частиц во вселенной и законы взаимодействия между ними. Тогда эта машина сможет получить закон движения, то есть предсказать движение каждой частицы. И даже если эта машина не существует, то все равно такой закон движения должен существовать и движение каждой частицы будет предопределено.

Утверждение не кажется удивительным пока не задуматься, что если предопределено движение каждой частицы, то и судьба человека предопределена, так как он состоит из частиц. И вот мы так плавно от механики перешли к разговору о фатализме. Не вдаваясь в подробности, скажем, что не все законы верные для макротел будут выполняться в микромиире и на микроуровне всегда существует неопределенность из-за которой нарушается детерминизм. Честное решение этого парадокса лежит в области квантовой механики и принципа неопределенности Гейзенберга [10].

Глава 2

Кинематика материальной точки

Просто мы чужие люди, которые случайно прошли вместе какой-то отрезок пути, так и не поняв друг друга.

"Тени в раю", Эрих Мария Ремарк

Как мы уже говорили, механика изучает исключительно модели реальных объектов и явлений и мы начнем изучать механику с самого простого раздела - кинематика материальной точки. Важно отметить, что несмотря на свою простоту этот раздел является фундаментом всех последующих разделов механики.

2.1 Система отсчета

Начнем изучение механики с модели материальной точки.

Определение 2.1 ***Материальная точка*** *- модель реального тела, в котором пренебрегают размером тела.*

Важно понимать, что возможность заменить тело на материальную точно зависит не только от размеров тела, а еще от размеров других тел в задачи и типа движения. Например, мы можем считать землю материальной точкой при решении задачи космических масштабов, хотя она и кажется нам большой. Так как движение является относительным понятием, в каждой задаче мы должны будет уточнять относительно чего мы описываем движение и в этом нам поможет система отсчета.

Определение 2.2 *Тело отчета - тело, относительно которого рассматривается движение.*

Определение 2.3 *Система отчета - это тело отсчета с связанной с ним системой координат и часами.*

Когда мы говорим “часы”, то подразумевается, что каждому положению тела нужно поставить в соответствие момент времени, то есть выбрать относительно какого момента времени будем отсчитывать.

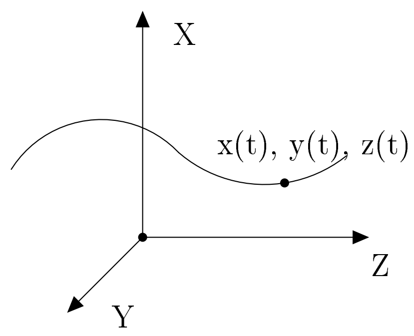


Рис. 2.1: Система координат

Для задания положения тела мы в основном будем использовать раудиус-вектор.

Определение 2.4 *Радиус-вектор - вектор из начала координат в точку, где находится тело.*

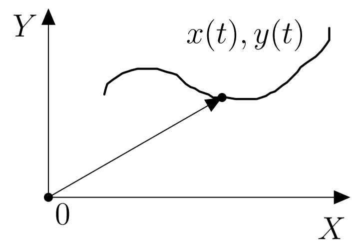


Рис. 2.2: Радиус-вектор

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t); y(t)) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Для визуализации движения материальной точки (да и любого тела) обычно используется понятие траектории.

Определение 2.5 *Траектория - ГМТ положений тела.*

Очень часто происходит путаница со следующими двумя понятиями.

Определение 2.6 *Путь - скалярная функция, равная длине траектории.*

Определение 2.7 *Перемещение - вектор направленный из начального положения в конечное*

Разница заключается хотя бы в том, что путь это скалярная величина, а перемещение векторная. Но разница становится еще более наглядной, если рассмотреть движение по окружности. Например если материальная точка сделает полный оборот по окружности, то перемещение будет нулевым, а путь будет равен длине окружности. Вектор перемещения $\overrightarrow{S}$ будет удобно записывать через изменение радиус-вектора:

$$\overrightarrow{S} = \Delta\overrightarrow{r} \tag{2.2}$$

2.2 Равномерное прямолинейное движение

Определение 2.8 ***Равномерное движение*** *- модель движения материальной точки, в которой материальная точка за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения.*

Заметим, что из такого определения следует, что движение будет вдоль одной прямой. В некоторых источниках под равномерным движением подразумевается, модель движения в котором за любые равные промежутки материальная точка проходить одинаковый путь, а не перемещение. Что бы избежать путаницы, мы будем использовать понятие равномерного прямолинейного движения, так как с ним не бывает разногласий на счет определений.

Определение 2.9 ***Равномерное прямолинейное движение (РПД)*** *- модель движения материальной точки, в которой материальная точка за любые равные промежутки времени совершает равные перемещения.*

Получается, что уточнение о прямолинейности является избыточным, но нам не сложно каждый раз уточнять, что бы ни у кого не возникло вопросов.

2.2.1 Скорость при равномерном движении

Понятие скорости является одним из самых естественных при описании движения, но важно понимать, что даже самым очевидным понятиям надо давать определения.

Определение 2.10 ***Скорость при РПД*** *- физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки и равная отношению перемещения к времени, за которое тело совершило это перемещение.*

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{S}}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} \tag{2.3}$$

$$v = \left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right] \tag{2.4}$$

$$\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z) \tag{2.5}$$

Аналогично можно определить скорость вдоль каждой оси:

$$v_x = \frac{S_x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}; \;\; v_y = \frac{S_y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta t}; \;\; v_z = \frac{S_z}{\Delta t} = \frac{\Delta z}{\Delta t};$$

Упражнение 2.1 *Докажите из определения РПД, что отношение* $\frac{\overrightarrow{S}}{\Delta t}$ *не зависит от выбора* Δt

Акцентируем внимание на том, что пока мы познакомились только с скоростью при РПД, и поэтому не можем говорить о какой-нибудь другой скорости.

2.2.2 РПД вдоль оси X

Для удобства, в дальнейшем, ограничимся описание РПД вдоль одной оси. Это можно всегда сделать, выбрав ось вдоль направления скорости. Основным способом описания движения для нас будет закон движения.

Определение 2.11 ***Закон движения*** *- функция зависимости координат тела (положения) от времени.*

Получим закон движения из определения скорости при РПД:

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{s}}{\Delta t} \Rightarrow v_x = \frac{S_x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_x(t - t_0)$$

$$x(t) = x_0 + v_x(t - t_0) \tag{2.6}$$

где, t_0 - показания часов в начальный момент времени. Обычно t_0 равно нулю, кроме тех случаев, когда два тела начинают двигаться в разные моменты времени.

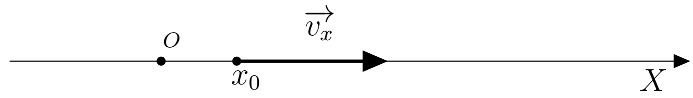


Рис. 2.3: Прямолинейное движение

2.2.3 Закон движения в векторном виде

Мы можем записать вектор перемещения $\overrightarrow{S}$ через изменение радиус вектора $\Delta\overrightarrow{r}$, тогда определение скорости при РПД примет вид:

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} \tag{2.7}$$

От сюда мы можем получить закон движение при РПД в векторном виде:

$$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v}(t - t_0) \tag{2.8}$$

Такая запись закона может пригодится в задачах с несколькими объектами, двигающимися РПД, но вдоль разных прямых.

2.2.4 Графики $x(t)$ и $v(t)$

В изучении законов движения большая роль отводится графику: именно он наглядно показывает зависимость разных характеристик движения друг от друга.
Разберемся с графиком зависимости координаты от времени. Функция $x(t) = x_0 + v_x t$ является прямой на графике, угловой коэффициент которой равен v_x:

$$\operatorname{tg}\alpha = v_x \tag{2.9}$$

Отметим, что знак v_x указывает на направление движения вдоль оси X .

Теперь изобразим график зависимости скорости от времени при РПД:
Скорость v - постоянная величина. Поэтому графиком функции $v_x = const$ является прямая, параллельная оси абсцисс. Заметим, что площадь под графиком равна пройденному пути.

2.3 Относительность движения

Мы уверены, что вы не раз замечали, что движение в нашем мире относительно. Достаточно обратить внимание на определение механического

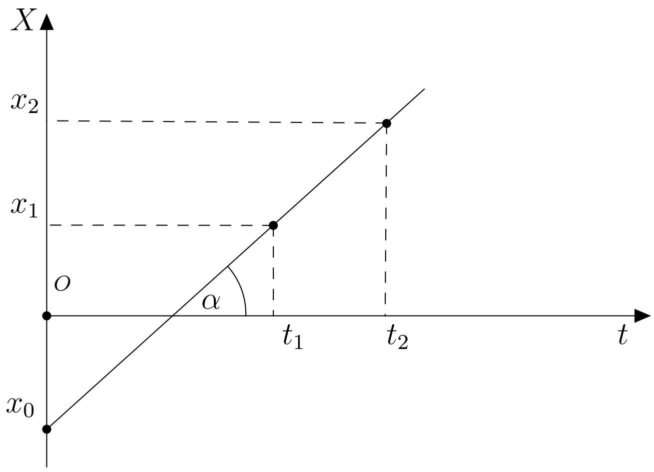


Рис. 2.4: График зависимости координаты от времени

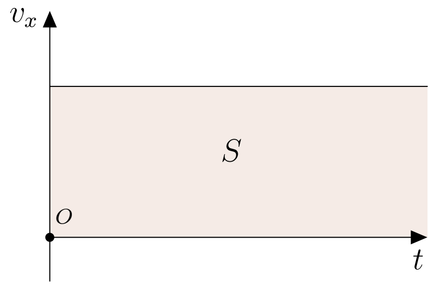


Рис. 2.5: График зависимости скорости от времени

движения, что бы убедиться в этом и мы должны будем уметь описывать движение тела относительно разных систем отсчета и переходить между ними.
Но прежде нужно разобраться с путаницей, которая возникает при использовании двух похожих понятий.

Определение 2.12 *Инвариант - физическая величина, значение которой не зависит от выбора системы отсчета.*

Определение 2.13 *Константа - физическая величина, значение которой не меняется со временем в заданной системе отсчета.*

Чувствуете разницу? Например, масса человека является инвариантом, но не является константой (люди могут толстеть или худеть). А скорость при РПД является константой, но не является инвариантом, так как зависит от выбора СО. Какие физические величины являются инвариантами, а какие нет? S, Δx, Δt, m , ρ - инварианты, но: t, x, v - не инварианты Действительно, в Москве и Лондоне часы показывают разное время, но если в Москве пройдет 90 минут, то и в Лондоне пройдет 90 минут (кто не верит, тот пусть вспомнит футбол). Одной из важнейших задач кинематики (да и всей физики) является умение связывать координаты в разных системах отсчета. Этому мы и посветим следующий пункт.

2.3.1 Преобразование Галилея

Начнем с простого примера. Возьмем две коллинеарные системы отсчета: X, Y, Z и X', Y', Z'. Время в наших системах отчета идет с одинаковой скоростью а часы синхронизированы, поэтому можем сказать, что $t = t'$. Для начала будем считать, что эти системы отсчета не двигаются относительно друг друга.
Пусть:

$$\overrightarrow{r} \text{ – радиус-вектор в точке } A \text{ в нештрихованной СО}$$

$$\overrightarrow{r}' \text{ – радиус-вектор в точке } A \text{ в штрихованной СО}$$

$$\overrightarrow{R} \text{ – Вектор из начала нештрихованной СО в начало штрихованной}$$

Тогда, из закона сложения вектором можем записать:

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}' + \overrightarrow{R} \tag{2.10}$$

Теперь рассмотрим более сложный случай: штрихованная система от-

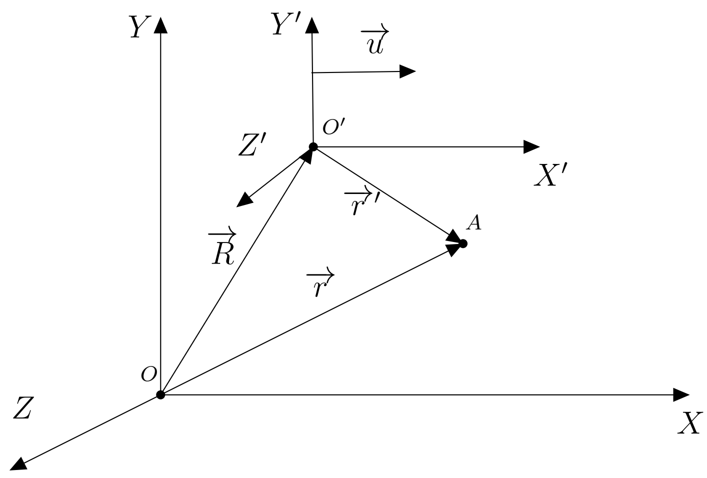


Рис. 2.6: Преобразования Галилея

чета движется со скоростью u относительно нештрихованной и выясним как связаны скорости в разных СО. Из (2.10) можем получить выражение для перемещений:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{\Delta r}' + \overrightarrow{\Delta R} \tag{2.11}$$

Поделив на Δt - время за которое произошло перемещение, получим:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}' + \overrightarrow{u} \tag{2.12}$$

Формулы (2.10, 2.12) называется **преобразованиями Галилея** для координат и скоростей. Отметит еще раз, что $t = t'$.

На самом деле, выражение (2.12) можно получить из (2.10) взяв производную по времени от обоих частей равенства.

2.4 Уравнение кинематической связи

Очень часто в задачах встречаются несколько тел связанных ниткой, стержнем или другим элементом конструкции. Обычно нитка считается нерастяжимой, а стержень нерастяжимым и несжимаемым. Тогда, очевидно, что между скоростями этих тел существует связь. Уравнение полученное из этой связи называется **уравнением кинематической связи**, а механизм связывающий тела - **жесткой связью**. В дальнейшем мы будем рассматривать не только жесткие связи, но и, например, связи с использованием пружинок.
Давайте для начала получим условие кинематической связи на конкретных примерах, а потом попытаемся сформулировать общее правило.

Пример 2.1 *Нить, перекинутую через блок, тянут с постоянной скоростью v. Какой будет скорость бруска в тот момент, когда нить составляет с горизонтом угол α?*

Пусть точка A движется со скоростью u, направленной горизонтально. Но с другой стороны, точка A это точка нити, значит вдоль нитки она имеет скорость v. Спроецировав скорость u на нитку получим:

$$u \cdot \cos\alpha = v$$

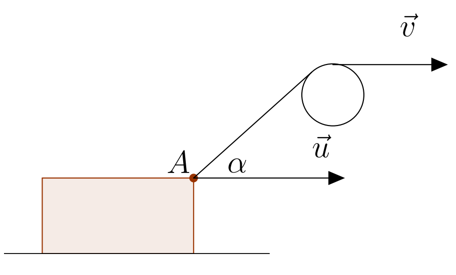


Рис. 2.7: Пример (2.1)

Таким образом получаем парадоксальный результат - скорость грузика больше чем скорость нитки:

$$u = \frac{v}{\cos\alpha}$$

Пример 2.2 *У нас есть два шарика, скрепленные твердым стержнем. Как связанны друг с другом скорости двух шариков?*

Для ответа на этот вопрос достаточно потребовать, чтобы длинна палки не менялась. За малый промежуток времени на изменение длинны палки влияет только проекция скорости шарика на палку, таким образом мы получаем, что:

$$v_1 \cdot cos(\alpha_1) = v_2 \cdot cos(\alpha_2)$$

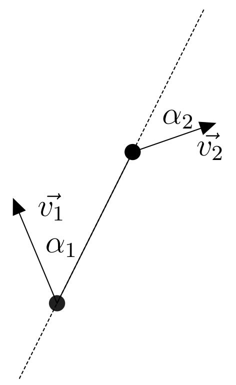


Рис. 2.8: Пример (2.2)

Из разобранных примеров, можем сформулировать общее правило, которым, однако, не следую пользоваться бездумно.

Теорема 2.1 *Проекция скоростей любых точек, связанных жесткой связью на связь равны.*

Упражнение 2.2 *Получите результат из (2.2) перейдя в СО, связанную с одним из шариков.*

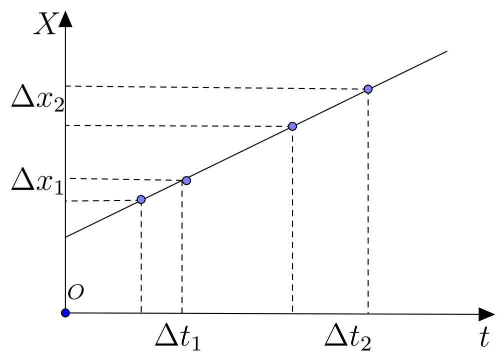
2.5 Неравномерное движение. Мгновенная скорость.

Итак, мы изучили равномерное движение. Вспомним еще раз основные моменты:

$$x(t) = x_0 + v_x t$$

$$\forall \Delta t : \tfrac{\Delta x}{\Delta t} = const$$

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha$$



$$\tfrac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \tfrac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$$

Рис. 2.9: РПД. График зависимости координаты от времени

Рассмотрим теперь пример неравномерного движения.

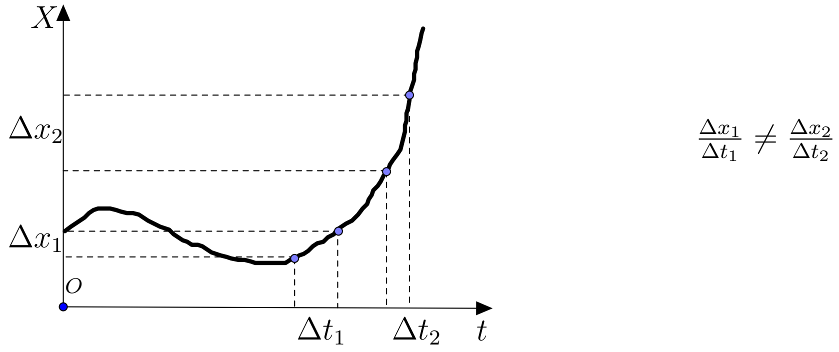


Рис. 2.10: Неравномерное движение. График зависимости координат от времени

Как можно заметить, не всегда $\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} \neq \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}$, тогда встает вопрос, как же тогда определить скорость? Чтобы решить возникшую проблему, введем понятие *мгновенной скорости*[1]

2.5.1 Мгновенная скорость.

Определение 2.14 *Мгновенная скорость - векторная физическая величина, характеризующая быстроту перемещения и направление движения материальной точки относительно выбранной системы отсчёта и равная отношению перемещения за малый промежуток времени к этому промежутку времени или просто производная радиус-вектора по времени:*

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t)$$

Заметим : в любой момент времени будет своя мгновенная скорость.

Как и при РПД нам будет удобно использовать понятие мгновенной скорости вдоль одной оси, тогда мгновенная скорость вдоль оси x будет иметь смысл тангенса угла наклона касательной к графику x(t):

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t) \tag{2.13}$$

$$v(t) = \operatorname{tg} \alpha(t) \tag{2.14}$$

После того как мы ввели понятие мгновенной скорости, мы можем дать новое, более привычное многим читателям, определение РПД.

[1] В этой и дальнейших главах будет активно использовано понятие производной. Если вдруг Вы не знакомы с ним, рекомендуем обратиться к списку литературы [9]

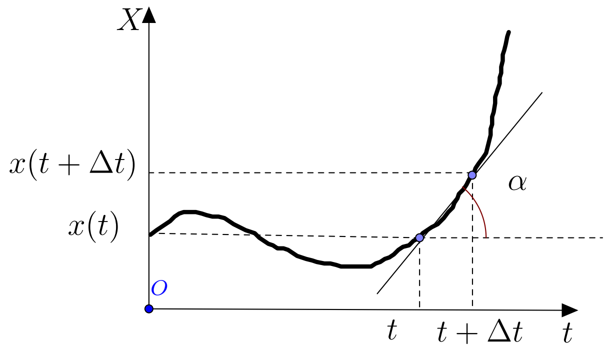


Рис. 2.11: Мгновенная скорость

Определение 2.15 *Равномерное прямолинейное движение - движение с постоянной мгновенной скоростью.*

Такое определение очень естественно, но нужно понимать, что с понятием мгновенной скорости мы познакомились позже чем с РПД, поэтому им мы можем пользоваться только сейчас.

2.5.2 Средняя скорость

Очень часто для описания неравномерного движения вводится понятие **средней скорости**, что позволяет описать движение в целом, не акцентируя внимание на конкретном моменте времени.

Определение 2.16 *Средняя скорость (средняя по перемещению) - физическая величина равная вектору перемещения разделенному на время за которое было совершено это перемещение:*

$$\overrightarrow{v_{cp}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

Такая скорость характеризует перемещение в целом, однако очень часто хочется описывать пройденный путь, поэтому введем еще одно понятие.

Определение 2.17 *Средняя путевая скорость - физическая величина равная всему пути, поделенному на время за которое был пройден этот путь:*

$$v_{путь} = \frac{l}{\Delta t}$$

Обратим внимание, что очень опасно путать разные средние скорости, например, если тело вернулась в первоначальную точку, то средняя скорость по перемещению равна нулю, а средняя путевая нет.

2.6 Равноускоренное движение

Одним из видов неравномерного движения является равноускоренное движение.

Определение 2.18 *Равноускоренное движение - модель движения материальной точки, в которой за любые равные промежутки времени скорость тела меняется на одинаковую величину:*

$$\forall \Delta t : \tfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = const$$

Легко заметить, что определение очень похоже на определение РПД с той только разницей, что изменение радиус-вектора тела заменяется на изменение скорости. Тогда возникает естественное желание ввести физическую величину, характеризующую скорость изменения скорости.

Определение 2.19 *Ускорение - векторная физическая величина, характеризующая скорость изменения скорости:*

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{\overrightarrow{v}(t+\Delta t) - \overrightarrow{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \overrightarrow{v}(t)}{\Delta t} = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$$

2.6.1 Закон изменения $\vec{v}(t)$

Если в определение (2.19) начальный момент времени обозначить t_0 (а скорость в начале $\overrightarrow{v}_0$), а конечный t, то можно получить:

$$\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{v}(t) - \overrightarrow{v}_0}{t - t_0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{a}(t - t_0) \tag{2.15}$$

Если расписать по координатам, то получим:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x(t - t_0);\;\; v_y(t) = v_{0y} + a_y(t - t_0);\;\; v_z(t) = v_{0z} + a_z(t - t_0); \tag{2.16}$$

Стоит отметить, что практически всегда можно положить $t_0 = 0$ и получить закон изменения скорости в более простом виде:

$$\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{a}t \tag{2.17}$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t;\;\; v_y(t) = v_{0y} + a_y t;\;\; v_z(t) = v_{0z} + a_z t; \tag{2.18}$$

Так же отметим, что часто мы будем записывать закон движения вдоль одной оси (когда тело двигается прямолинейно) и опускать индекс оси.

2.6.2 График

Рассмотрим равноускоренное движение вдоль произвольной оси X. Как мы говорили, иногда мы не будем писать индекс оси, сейчас именно тот случай. Изобразим график зависимости скорости от времени:

$$v(t) = v_0 + at.$$

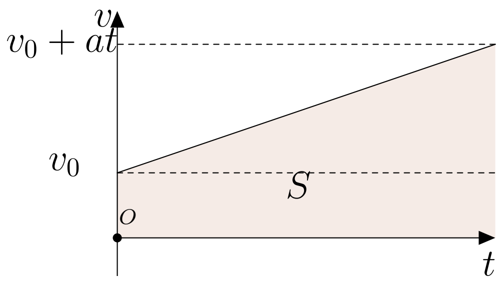


Рис. 2.12: Равноускоренное движение. График зависимости скорости от времени

Функция $v(t) = v_0 + at$ является прямой на графике, угловой коэффициент равен ускорению a.

$$\operatorname{tg}\alpha = a \tag{2.19}$$

Площадь под графиком равна перемещению точки вдоль оси OX, причем площадь будет отрицательной, если график уходит под ось OX. В этом факте просто убедиться, разбив наше движение на много участков с РПД.

$$S(t) = v_0 \cdot t + \frac{at \cdot t}{2}$$

Координата с перемещением связаны простым образом:

$$x(t) = x_0 + S(t)$$

Тогда закон движения вдоль оси X примет следующий вид:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \tag{2.20}$$

2.6.3 Закон движения при равноускоренном движении

Обычно закон движения при равноускоренном движение используется в проекции на ось (2.20), однако нужно уметь записывать закон движения и в векторном виде. Его мы можем получить, записав (2.20) вдоль трех осей и объединив их в вектор:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2} \tag{2.21}$$

Упражнение 2.3 *Материальная точка двигается вдоль двух осей равноускоренно, а вдоль другой равномерно. Какой тип движения будет?*

Хочется отметить, что если тело начинает двигаться не в момент времени $t_0 \neq 0$, то просто во всех законах движения (2.20 и 2.21) будет достаточно заменить t на $t - t_0$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}(t - t_0)^2}{2} \tag{2.22}$$

2.6.4 Вывод закона движения через определение производной

Легко заметить, что определение ускорения (2.19) очень напоминает производную скорости, то есть мы можем записать:

$$\vec{v}'(t) = \vec{a} \tag{2.23}$$

Тогда, в случае равноускоренного движения нам нужно угадать функцию, чья производная равна $\vec{a}$. Такая функция угадывается с точность до константы, которая имеет смысл начальной скорости:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \tag{2.24}$$

Вспомнив определение мгновенной скорости (2.14) станет понятно, что задача отыскания закона движения $\vec{r}(t)$, эквивалентна угадыванию функции, производная которой равна $\vec{v}(t)$, так как $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t)$. Из свойств производной многочлена легко понять верность закона (2.21)
Читатель, наверное, заметил, что находить закон изменения скорости $\vec{v}(t)$, зная закон движения $\vec{r}(t)$ очень просто - достаточно просто посчитать производную. Таким образом становится понятно почему обратная задача механики считается простой. А вот задача нахождения $\vec{r}(t)$ по известному $\vec{v}(t)$ представляется куда более сложной и не зря называется основной задачей механики.

2.6.5 Формула пути без времени

Разберем один из важных примеров равноускоренного движения.

Пример 2.3 *Тело двигается с ускорением a, какой путь пройдет тело пока оно ускорялось (тормозило) от скорости v_1 до скорости v_2?*

Запишем закон движения и закон изменения скорости, взяв за начальную скорость v_1:

$$x(t) = v_1 t + \frac{at^2}{2} \tag{2.25}$$

$$v(t) = v_1 + at \tag{2.26}$$

Найдем в какой момент времени скорость станет равна v_2, назовем это время $t_{\text{пути}}$: $v(t_{\text{пути}}) = v_1 + at_{\text{пути}}$. О сюда:

$$t_{\text{пути}} = \frac{v_2 - v_1}{a} \tag{2.27}$$

Подставляя в (2.25) получаем конечную координату:

$$x(t_{\text{пути}}) = \frac{(v_2 - v_1)v_1}{a} + \frac{a(\frac{v_2 - v_1}{a})^2}{2} \tag{2.28}$$

От сюда получаем формулу пути без времени:

$$S = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} \tag{2.29}$$

Справедливости ради нужно отметить, что мы вычислили численное значение проекции перемещения перемещение, а не путь. Однако, если скорость не меняла направление (знак), то можно говорить о нахождении пути. Таким образом, отдавая дань традициям, мы будем называть ее формулой пути без времени.

2.6.6 Путь пройденный за k-ую секунду

Пример 2.4 *Тело начинает движение с ускорением a. Какой путь пройдет тело за k-ую секунду?*

Тело двигается по закону $x(t) = \frac{at^2}{2}$ Если мы обозначим путь, пройденный за k-ую секунду S_k, то получим:

$$S_k = x(k) - x(k-1) = \frac{a}{2}(k^2 - (k-1)^2) = \frac{a}{2}(2k - 1) \tag{2.30}$$

Заметим, что путь пройденный за τ равно $x(\tau)$, но с другой стороны оно равно сумме путей пройденных за первый τ секунд:

$$x(\tau) = \frac{a}{2}\tau^2 = \sum_{k=1}^{k=\tau} \frac{a}{2}(2k-1) \tag{2.31}$$

От сюда можем получить известное из математике равенство, для суммы нечетных чисел:

$$\sum_{k=1}^{k=\tau}(2k-1) = \tau^2 \tag{2.32}$$

2.7 Свободное падение

Вблизи поверхности Земли все без исключения свободные тела двигаются с ускорение свободного падения $g = 9,8$м/с. Свободным телом мы будет называть тело на которое не оказывается воздействие. Таким образом мы будем пренебрегать сопротивлением воздуха, действительно, если отпустить гирю и перышко в откаченной до состояния вакуума комнате, то они упадут одновременно. Нужно быть внимательным когда такое пренебрежение недопустимо (например при расчете движение парашютиста). Тогда закон движения тела в поле тяжести Земли выглядит так:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \tag{2.33}$$

Пример 2.5 *Тело падает с высоты H. Найти время падения и скорость перед падением.*

Решение любой задачи по кинематике начинается с выбора СО (рис.2.13) и записи законов движения и изменения скорости:

$$y(t) = H - \frac{gt^2}{2}$$

$$v(t) = -gt$$

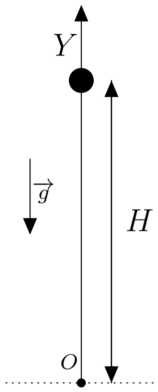


Рис. 2.13: Свободное падение

Далее нужно записать условие задачи на математическом языке. Если тело упало, то его координата по оси Y равна нулю:

$$y(t_{\text{пад}}) = 0$$

$$h - \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2} = 0$$

Тогда время падения равно:

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2H}{g}},$$

а скорость в нижней точке:

$$v_{\text{пад}} = v(t_{\text{пад}}) = \sqrt{2gH}$$

Пример 2.6 *Какой путь пройдет свободнопадающее тело за первые и последние τ секунд?*

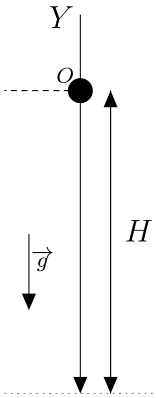


Рис. 2.14: Падение

Для начала выберем СО. Начало СО возьмем совпадающим с начальным положением тела, а ось Y направим вниз (рис. 2.14). Тогда закон движения будет иметь вид:

$$y(t) = \frac{gt^2}{2}$$

Тогда путь за первые τ секунд будет равен:

$$l_1 = y(\tau) - y(0)$$

а за последние τ секунд:

$$l_2 = y(t_{\text{пад}}) - y(t - \tau)$$

Осталось найти $t_{\text{пад}}$, в момент падения координата тела равна высоте H:

$$y(t_{\text{пад}}) = H = \frac{gt_{\text{пад}}^2}{2} \Rightarrow$$

$$t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2H}{g}} \Rightarrow$$

$$l_1 = \frac{g\tau^2}{2}; \;\; l_2 = H - \frac{g}{2}(\sqrt{\frac{2H}{g}} - \tau)^2$$

Пример 2.7 *Пусть тело кидают с поверхности Земли с известной скоростью v_0. Найти время подъема, максимальную высоту поднятия и полное время полета.*

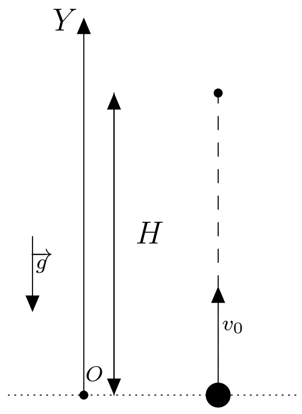


Рис. 2.15: Высота подъема

Выберем систему отсчета (рис. 2.15) и запишем закон движения и изменения скорости:

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v(t) = v_0 - gt$$

Максимальная высота поднятия достигается в тот момент времени, когда скорость тела достигает нуля (подумайте почему). Тогда:

$$v(t_{\text{подъема}}) = v_0 - gt_{\text{подъема}} = 0 \Rightarrow t_{\text{подъема}} = \frac{v_0}{g}$$

Как ни странно это звучит, но высота подъема равна координате в тот момент, когда тело находится в верхней точке:

$$H = y(t_{\text{подъема}}) = v_o t_{\text{подъема}} - \frac{gt^2_{\text{подъема}}}{2} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Заметим, что этот результат мы могли сразу получить использую формулы пути без времени (2.29).
Теперь найдем время,за которое тело вернулось в исходную точку. Тело вернулось в начальную точку, а значит его координата ноль.

$$y(t) = v_0 t_{\text{полное}} - \frac{gt^2_{\text{полное}}}{2} = 0 \Rightarrow t_1 = 0;\ \ t_2 = \frac{2v_0}{g}$$

Действительно, тело находилось на земле в самый начальный момент и после всего полета. Значит время полета

$$t_{\text{полное}} = \frac{2v_0}{g}$$

Обратим внимание, что время подъема равно половине полного времени полета. Это и так было очевидно? Очевидно это то, что легко доказать, вот мы и доказали.

2.8 Движение под углом к горизонту

А что изменится, если кинуть тело не вертикально вверх, а под какимлибо углом к горизонту?

Вдоль оси Y закон движения останется таким же:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t - \frac{gt^2}{2}$$

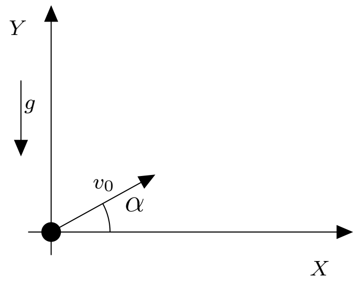


Рис. 2.16: Движение под углом к горизонту

$$v_y(t) = v_{0y} - gt.$$

Но появится еще ось X, вдоль которой движение равномерно и прямолинейно:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$
$$v_x(t) = v_{0x}.$$

Спроецировав начальную скорость на оси, получаем:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha; \;\; v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha;$$

Тогда можем записать закон движения и изменения скорости в поле тяжести Земли:

$$\begin{array}{l} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt \\ x(t) = x_0 + v_0 \cos\alpha t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \end{array} \quad (2.34)$$

Система законов (2.34) полностью описывает движение тела, брошенного под углом к горизонту и в дальнейшем позволит решать абсолютно любые задачи.

Пример 2.8 *Найти максимальную высоту понятия, длину и дальность полета, зная начальную скорость и угол броска.*

Решение любой задачи по кинематики нужно начинать с выбора СО. В данном случае разумно выбрать СО, связанную с начальным положением тела (рис. 2.17). После этого необходимо записать закон движения и закон изменения скорости:

$$\begin{array}{l} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt \\ x(t) = v_0 \cos\alpha t \\ y(t) = v_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \end{array} \quad (2.35)$$

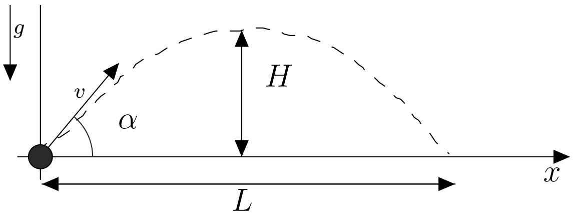


Рис. 2.17: Бросок под углом к горизонту

Время полета и высота поднятия находится аналогично примеру (2.7):

$$v_y(t_H) = v_0 \sin\alpha - gt_H = 0 \Rightarrow t_H = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$H = y(t_H) = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

Тело упало в момент времени $t_{\text{полное}}$, значит координата но оси y равна нулю

$$y(t_{\text{полное}}) = v_0 \sin\alpha t_{\text{полное}} - \frac{g t_{\text{полное}}^2}{2} = 0 \Rightarrow t_{\text{полное}} = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

Найдем дальность полета. Дальность полета равна координате по оси x в тот момент когда тело упало, то есть $t_{\text{полное}}$:

$$L = x(t_{\text{полное}}) = v_0 \cos\alpha t_{\text{полное}} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

А теперь давайте проанализируем ответ. Как вы знаете из курса математики $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$, тогда

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Значит максимальная дальность полета достигается при максимальном синусе, то есть :

$$\sin 2\alpha_{max} = 1 \Rightarrow \alpha_{max} = 45^\circ$$

Таким образом, максимальная дальность полета достигается при броске под углом в 45°.

2.8.1 Траектория

Вы, наверное, уже догадываетесь по какой кривой движется тело при броске под углом к горизонту, но давайте выведем это честно. Для этого запишем закон движение относительно СО, связанной с начальным положением тела.

$$y(t) = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$x(t) = v_0 t \cos\alpha$$

Для того чтобы получить зависимость $y(x)$ выразим t из второго выражения и подставим в первое:

$$t(x) = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y(t(x)) = \frac{x v_0 \sin\alpha}{v_o \cos\alpha} - \frac{g(\frac{x}{v_0\cos\alpha})^2}{2}$$

Преобразовав это выражение, получаем:

$$y(x) = -\frac{gx^2}{2(v_0\cos\alpha)^2} + x \operatorname{tg}\alpha \qquad (2.36)$$

Формула (2.36) является квадратичной зависимостью от x. График зависимости - парабола, с вершиной $x_{\text{в}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha (v_0\cos\alpha)^2}{g} = \frac{v_0 \sin 2\alpha}{2g}$. Уравнение траектории получается достаточно громоздким и труднопримenимым при решении задач, однако оно может быть полезно при компьютерных расчетах.

2.8.2 Угол и модуль скорости

Очень часто при описание движения возникает необходимость знать чему равна скорость под каким углом к горизонту она в данный момент направлена . Найдем зависимость угла от времени $\alpha(t)$.

Пусть тело бросают с начальной скоростью v_0 под углом α_0 к горизонту. Запишем закон изменения скорости по двум осям:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha_0$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha_0 - gt$$

Заметим, что:

$$\operatorname{tg}\alpha(t) = \frac{v_y(t)}{v_x(t)} = \frac{v_0\sin\alpha_0 - gt}{v_0\cos\alpha_0} = \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{gt}{v_0\cos\alpha_0} \qquad (2.37)$$

Так же мы можем найти модуль скорости в любой момент времени. Из теореме Пифагора находим v(t):

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha_0)^2 + (v_0 \sin \alpha_0 - gt)^2} = \\ = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin \alpha + (gt)^2} \qquad (2.38)$$

Как мы знаем, что бы задать вектор можно задать его компоненты (в нашем случае $v_x(t)$ и $v_y(t)$), а можно модуль и угол ($v(t)$ и $\alpha(t)$). Поэтому, можно сказать, что в этом пункте при записи вектора скорости мы просто перешли от декартовых координат к полярным. Это может оказаться очень удобно в некоторых задачах, например в задаче 3.2.

Глава 3

Кинематика вращательного движения

Летит ветер к югу, поворачивает к северу — кружится, кружится ветер и возвращается на круги свои.

Книга Екклесиаста

Отдельная очень важная роль при изучении кинематики отводится кинематике вращательного движения и это не случайно. Нас всюду окружает движение по окружности (или почти по окружности) будь то вращение Земли вокруг Солнца, Луны вокруг Земли, Земли вокруг своей оси или просто вращение колеса, не даром ведь изобретение колеса является одним из важнейших изобретений человека.
Однако, важность изучения вращательного движения заключается еще в том, что любое криволинейное движение можно разбить на много маленьких поворотов, это напрямую следует из **теоремы Шаля**

Теорема 3.1 ***(Шаля)*** *всякое преобразование плоскости можно представить как параллельный перенос, вращение, осевую или скользящую симметрию.*

Эта теорема широко известна в математике и мы не будет останавливаться на ее доказательстве, а любопытному читателю советуем обратиться к дополнительной литературе, например [8].

3.1 Движение по окружности

Как мы уже сказали, важную роль для описания криволинейного движение служит движение по окружности. Поэтому мы уделим повышенное внимание этому вопросу.

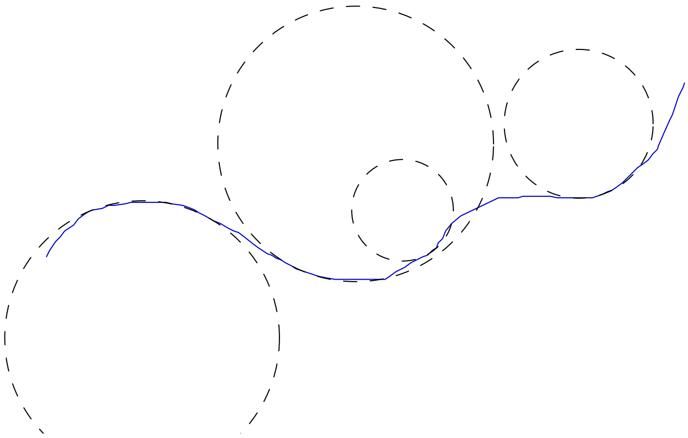


Рис. 3.1: Приближение кривой траектории окружностями

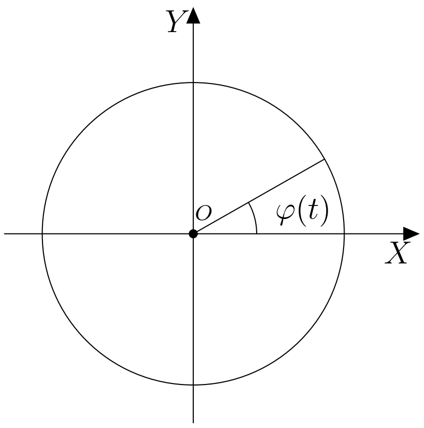


Рис. 3.2: Движение по окружности

Прежде всего, посмотрим какая информация у нас есть о окружности.

- Длина дуги с центральным углом, равным α

$$l_{\text{дуги}} = \alpha R \tag{3.1}$$

- Длина окружности

$$l = 2\pi R \tag{3.2}$$

- Уравнение окружности

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{3.3}$$

Из всего этого можно сделать вывод, что для задания положения тела на окружности радиуса R будет избыточно задавать координаты $x(t)$

и $y(t)$. Нам будет достаточно ввести функцию $\varphi(t)$, которая описывает зависимость угла от времени. При этом направление против часовой стрелке будем считать положительным, а по часовой - отрицательным.

Тогда $x(t)$ и $y(t)$ можно выразить через $\varphi(t)$:

$$x(t) = R\cos\varphi(t); \;\; y(t) = R\sin\varphi(t). \tag{3.4}$$

3.2 “Равномерное” движение по окружности

Начнем изучение движения по окружности с самого простого случая.

Определение 3.1 *“Равномерное” движением по окружности - модель движения по окружности, при котором модуль скорости (мгновенной) тела остается постоянным с течением времени.*

Поясним, что “равномерное” мы пишем в кавычках, так как при таком движении сохраняется только модуль скорости, а вектор скорости меняется, поэтому мы не можем называть его равномерным в полном смысле этого слова (см. 2.2).

$$|\overrightarrow{v}| = const \tag{3.5}$$

Введем несколько понятий, связанных с движением по окружности.

Определение 3.2 *Период обращения - время, за которое тело совершает один полный оборот.*

Для того, чтобы найти период, применим формулу для разделим длину окружности на скорость:

$$T = \frac{2\pi R}{|\overrightarrow{v}|} = \frac{2\pi R}{v} \tag{3.6}$$

Определение 3.3 *Частота обращения - физическая величина равная количеству оборотов за одну секунду.*

$$\nu = \frac{1}{T} = [c^{-1}] = [\text{Гц}] \tag{3.7}$$

3.2.1 Центростремительное ускорение

Как мы сказали ранее, модуль скорости v не меняется, однако, вектор скорости $\overrightarrow{v}$ меняет свое направление, поэтому в каждый момент времени можно утверждать, что тело двигается с каким-то ускорением. Найдем это ускорение.

Пусть тело за время Δt переместилось из точки A в точку B.

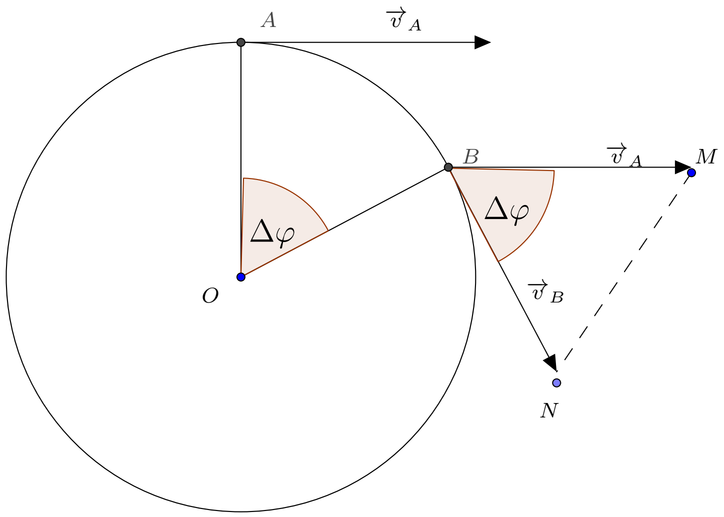


Рис. 3.3: Центростремительное ускорение

По определению, ускорение - первая производная по времени от пройденного пути:

$$\vec{a} = \vec{v}'(t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_B} - \vec{v_A}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{MN}}{\Delta t}$$

Длина дуги, которую тело прошло за время Δt :

$$l_{\cap AB} = v \cdot \Delta t$$

Так как промежуток времени Δt мал, то можно считать, что длина дуги равна длине хорды:

$$l_{\cap AB} = AB$$

Тогда заметим, что треугольники $\triangle AOB$ и $\triangle MBN$ подобны (равнобедренные треугольники с одинаковым углом между боковыми сторонами), тогда

$$\frac{AB}{MN} = \frac{OB}{BM} \Rightarrow \frac{v\Delta t}{a\Delta t} = \frac{R}{v}$$

От сюда получаем, что модуль ускорения равен:

$$a = \frac{v^2}{R} \tag{3.8}$$

Теперь осталось определить направление ускорения. При стремление времени Δt к 0, угол $\Delta\varphi$ стремится тоже к нулю. Следовательно $\overrightarrow{MN}$

будет перпендикулярен скорости $\overrightarrow{v}_A$, а так как $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{a}\Delta t$. А значит, мгновенное ускорение в любой момент будет перпендикулярно скорости, то есть направленно к центру окружности. Именно поэтому это ускорение назвали *центростремительным* или *нормальным ускорением*. Обозначать его мы будет $\mathbf{a_n}$ или $\mathbf{a}_{\text{ц}}$.

3.2.2 Закон движения по окружности

Теперь попытаемся получить закон движения по окружности $\varphi(t)$. Пусть материальная точка двигалась по окружности радиуса R с постоянной по модулю скоростью v. Тогда за время Δt тело преодолеет путь :

$$l = v\Delta t \tag{3.9}$$

Вспоминая связь между длиной дуги и изменением угла (3.1), можем записать на какой угол повернется материальная точка:

$$\Delta\varphi = \frac{l}{R} = \frac{v}{R} \cdot \Delta t \tag{3.10}$$

Определение 3.4 *Угловая скорость при "равномерном" движении по окружности - физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки по окружности и равная отношению угла поворота ко времени за которое которое был совершен этот поворот.*

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

Как видно, при "равномерном" движении по окружности это отношение не зависит от выбора промежутка времени Δt. Тогда из (3.10) для угловой скорости при "равномерном" движении по окружности получаем:

$$\omega = \frac{v}{r} \tag{3.11}$$

Из (3.10) и (3.11) , заменив $\Delta\varphi$ на $\varphi(t) - \varphi_0$, а Δt на $t - t_0$, получаем:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \frac{v}{R} \cdot (t - t_0) = \varphi_0 + \omega \cdot (t - t_0) \tag{3.12}$$

Полученный закон движения по окружности (3.12) кажется нам таким же родным, как Есенину рязанские просторы и белая березка. Неудивительно, ведь мы практически его (2.6) встречали при изучении РПД. Разница лишь в том, что координата меняется на угол (угол это тоже координата, но не декартова) а скорость на угловую скорость.

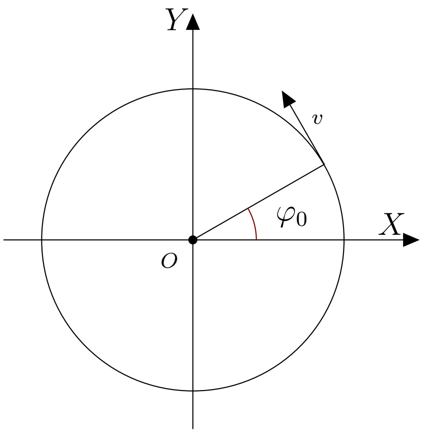


Рис. 3.4: Движение по окружности

Упражнение 3.1 *Докажите следующие равенства, связывающие* ν, T, ω *и* a_n*:*

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = \frac{v}{R}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega v$$

В заключение хочется отметить, что очень просто работать с угловыми характеристиками, если просто знать чему равна длинна дуги и уметь брать производную. Действительно, если мы запишем связь длины дуги с углом $l = \varphi \cdot R$ и возьмем производную, то получим:

$$l' = \varphi' R$$

а вспоминая, что угловая скорость это есть производная угла, получаем:

$$v = \omega \cdot R$$

3.3 “Равноускоренное” движение по окружности

Далеко не любое движение по окружности будет “равномерным”, поэтому нам необходимо ввести понятие мгновенной угловой скорости по аналогии с обычной мгновенной скорость (опр. 2.14).

Определение 3.5 *Мгновенная угловая скорость - физическая величина, характеризующая быстроту перемещения материальной точки по окружности и равная отношению изменению угла за малый промежуток времени к этому промежутку времени или просто производная угла по времени:*

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t)$$

Теперь перейдем к “равноускоренному”, движению по окружности, то есть случаю, когда модуль скорости будет меняться равномерно.

Определение 3.6 *“Равноускоренное”, движение по окружности - модель движения по окружности при которой модуль скорости тела за любые равные промежутки времени меняется на равную величину:*

$$\forall \Delta t : \frac{\Delta v}{\Delta t} = const$$

Представляется разумным ввести физическую величину отвечающую за скорость изменения скорости.

Определение 3.7 *Тангенциальное (касательное) ускорение - часть ускорения, сонаправленная скорости, отвечающая за изменение модуля скорости.*

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Обозначать тангенциальное ускорение мы будем a_τ
Кстати, дать определение “равноускоренному”, движению по окружности можно используя понятие мгновенной угловой скорости:

Определение 3.8 *“Равноускоренное”, движение по окружности - модель движения по окружности при которой мгновенная угловая скорость тела за любые равные промежутки времени меняется на равную величину:*

$$\forall \Delta t : \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = const$$

Отметим, что здесь мы пишем “равноускоренное”, в кавычках, так как у полного ускорения будет меняться как модуль так и направление (см. пункт 3.3.2).

3.3.1 Закон движения по окружности

Теперь получим закон движения по окружности $\varphi(t)$. Пусть материальная точка двигается по окружности радиуса R при этом модуль скорости менялся равномерно, то есть:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a_\tau \tag{3.13}$$

Вспоминая связь между линейной и угловыми скоростями (3.10), можем записать изменение угловой скорости:

$$\Delta\omega = \frac{\Delta v}{R} = \frac{a_\tau}{R} \cdot \Delta t \tag{3.14}$$

Определение 3.9 *Угловое ускорение - отношение изменения угловой скорости ко времени, за малый промежуток времени или просто производная угловой скорости по времени.*

$$\beta = \frac{d\omega(t)}{dt} = \omega'(t)$$

Важно понимать, что здесь мы сразу дали определение мгновенному угловому ускорению, но при "равноускоренном" движении по окружности оно будет постоянным:

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{a_\tau}{R} \tag{3.15}$$

Тогда из (3.15) и определения углового ускорения (опр. 3.9), заменив $\Delta\omega$ на $\omega(t) - \omega_0$, а Δt на $t - t_0$, можем получить закон изменения угловой скорости:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{a_\tau}{R} \cdot (t - t_0) = \omega_0 + \beta \cdot (t - t_0) \tag{3.16}$$

Можно заметить, что мы получили полную аналогию закону изменения скорости при равноускоренном движение (2.18). Поэтому без лишних выкладок можем сразу записать закон движения для по окружности :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0) + \frac{\beta(t - t_0)^2}{2} \tag{3.17}$$

Напомним, что все определения очень просто сформулировать на языке производных:

$$\beta = \omega' = \varphi'' \tag{3.18}$$

3.3.2 Связь между нормальным, тангенциальным и полным ускорениями

До сих пор мы не говорили пока про полное ускорение при "равноускоренном" движении по окружности, и оно, очевидно, меняется (вот почему "равноускоренное" в кавычках), так как центростремительное (нормальное) ускорение зависит от скорости. Так как тангенциальное ускорение перпендикулярно нормальному, то по можем записать:

$$\overrightarrow{a}_{\text{полн}} = \overrightarrow{a}_n + \overrightarrow{a}_\tau \tag{3.19}$$

$$a(t) = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \tag{3.20}$$

При этом можно учесть, что:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 + a_\tau(t - t_0))^2}{R}$$

Как мы видим при "равноускоренном", движение по окружности, модуль тангенциального ускорения постоянен, но модуль нормального ускорения изменяется, поэтому суммарное ускорение $\overrightarrow{a}_{\text{полн}}$ будет меняться как по направлению так и по модулю.

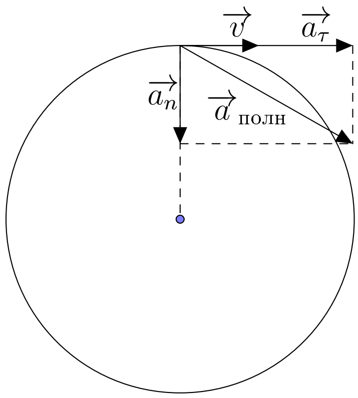


Рис. 3.5: Ускорения при движении по окружности

3.3.3 Радиус кривизны траектории

Как мы говорили в начале главы, любое движение в малый момент времени можно представить как движение по окружности какого-то радиуса. Этот радиус называется **радиусом кривизны**. Радиус кривизны можно записать через нормальное (центростремительного) ускорение:

$$R_{\text{крив}} = \frac{v^2}{a_n}$$

Таким образом, для нахождения радиуса кривизны мне нужно знать модуль скорости, модуль полного ускорения и угол между ними (что бы найти нормальную составляющую).

Упражнение 3.2 *Найти радиус кривизны траектории при движении под углом к горизонту в произвольный момент времени.*
Указание: нормальное ускорение - проекция полного ускорения на перпендикуляр к скорости, а полное ускорение - ускорение свободного падения. Полезная информация про скорость и углы в пункте (2.8.2).

Глава 4

Динамика материальной точки

Далекие милые были!..
Тот образ во мне не угас.
Мы все в эти годы любили,
Но, значит, Любили и нас.

"Анна Снегина", Сергей Есенин

Для описания движения тел необходимо научится объяснять причины возникновения движения и для этого мы перейдем к изучению динамики. Еще несколько тысячелетий назад люди начали задумываться о причине движения. Например, Аристотель, живший в 4 веке до н. э., заметил. что для сохранении скорости к телу необходимо прикладывать силу. Как мы знаем сейчас, он ошибался, так как считал, что *природа не терпит пустоты*, то есть всегда найдется что-то мешающее движению частиц. И только много столетий спустя, Галилей, живший на уже в 16 веке н.э., осознал, что сила нужна для изменения скорости.

4.1 Законы Ньютона

Во всей динамике нет ничего более важного, чем законы Ньютона. Возможно, вы не поверите, но любую задачу мы сможем решить аккуратно использую законы Ньютона. Любое механическое явление можно объяснить с их помощью. Теперь когда вы будете говорить "очевидно", вы будете подразумевать "из законов Ньютона". Будет неплохо, если в задачах законы Ньютона вам заменят интуицию, здравый смысл и пр. Конечно, мы немного утрируем, но сложно переоценить роль законов Ньютона.

4.1.1 Принцип относительности Галилея

Пытаясь разобраться в причинах возникновения движения, Галилей пришел к выводу, что само понятие движения относительно и сформулировал следующий принцип. *никакими механическими опытами в трюме корабля, движущегося равномерно и прямолинейно относительно земли, нельзя отличить его от покоящегося.*

Определение 4.1 ***Принцип относительности Галилея****: никаким механическим опытом нельзя отличить покоящуюся СО от системы, которая двигается равномерно и прямолинейно.*

Действительно, даже бессмысленно говорить о том, что данное тело покоится или движется равномерно, ведь мы не сказали относительно чего. Во многом, основываясь на работах Галилея, Ньютон и сформулировал свои знамениты законы. Не случайно, Ньютон писал в письме Гуку в 1626 году:
If I have seen further it is by standing on ye sholders of Giants.

4.1.2 Первый закон Ньютона

Определение 4.1 ***Первый закон Ньютона****: существуют системы отсчета, называемые инерциальными (ИСО), в которых если на тело не воздействуют другие тела или их воздействие скомпенсировано, то это тело продолжает покоиться или движется прямолинейно и равномерно.*

Из такого закона и определения следует, что все инерциальные системы отсчета или покоятся или РПД относительно друг друга. Стоит отметить, что существование инерциальной СО остается под вопросом, так как Земля движется с ускорением относительно Солнца, Солнце относительно центра Нашей галактики ... Однако, всегда в задачах можно выбрать СО, которая будет в достаточной мере инерциальной. Например, когда мы рассматриваем движение тела в поле тяжести Земли, то Землю разумно считать инерциальной СО. Использую понятие инерциальной системы отсчета мы можем иначе сформулировать принцип относительности Галилея:

Определение 4.2 ***Принцип относительности Галилея****: во всех ИСО законы механики имеют одинаковый вид.*

4.1.3 Второй закон Ньютона

Основным понятием в динамике будет взаимодействие между телами, поэтому нам нужно научиться количественно измерять взаимодействие (или воздействие) между телами.

Определение 4.2 *Сила - физическая величина, являющаяся мерой взаимодействия двух тел.*

Может показаться, что это определение абсолютно бесполезно, но оно позволяет нам удачно связать силу с другими физическими величинами. Для этого давайте вспомним некоторые из них и постараемся их не путать друг с другом:

Определение 4.3 *Инертность - способность тела сопротивляться внешнему воздействию.*

Определение 4.4 *Инерция - способность тела продолжать движение при отсутствии внешних сил.*

Определение 4.5 *Масса - мера инертности тела.*

Стоит отметить, что здесь имеется в виду инертная масса, которую мы будем иметь в виду по умолчанию.

Определение 4.3 ***Второй закон Ньютона****: в ИСО (инерциальной системе отсчета) ускорение прямо пропорционально сумме сил, действующих на тело, и обратно пропорционально массе тела.*

$$\overrightarrow{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_i}{m} \tag{4.1}$$

Получим размерность силы:

$$[F] = \text{Н} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \tag{4.2}$$

В проекции на оси второй закон Ньютона (2ЗН) можно записать:

$$a_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_{ix}}{m}; \;\; a_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_{iy}}{m}; \;\; a_z = \frac{\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F}_{iz}}{m} \tag{4.3}$$

Важно отметить, что сила это векторная физическая величина и начало вектора мы будем называть *точкой приложения силы.* Так как в этой главе мы будем изучать только материальные точки, то нам не принципиально к какой точке тела будет приложена сила.
Забегая вперед, мы можем показать как будет отличаться тип движения, в зависимости от точки приложения силы.. Рассмотрим два случая: в первом, силы приложены к разным краям тела, как показано на рисунке, а во втором - обе силы к одной точке.

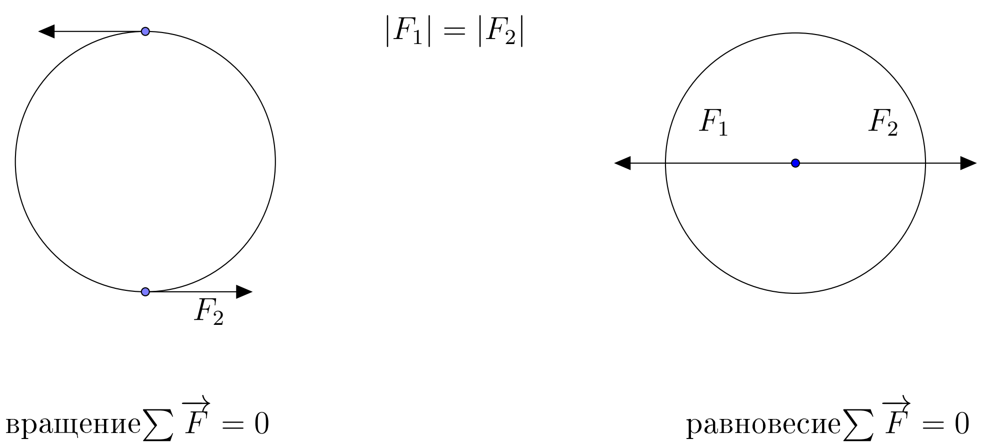


Рис. 4.1: Точки приложения сил

4.1.4 Третий закон Ньютона

Как мы уже отмечали, сила это мера взаимодействия между телами, поэтому следующий закон напрашивается сам по себе.

Определение 4.4 ***Третий закон Ньютона*** - *два тела (материальные точки) взаимодействуют друг с другом силами, равными по модулю и противоположными по направлению. Эти силы имеют одинаковую природу и направлены вдоль одной прямой.*

Сразу может возникнуть вопрос о какой природе идет речь? Пока не вдаваясь в подробности, скажем, что принято выделять четыре природы сил в соответствие с четырьмя фундаментальными взаимодействиями:

- Гравитационное
- Электромагнитное
- Слабое
- Сильное

Подробнее о природе сил мы будем говорить когда будем изучать различные силы.

Пример 4.1 *Из ЗЗН следует, что Земля действует на Солнце с такой же силой с какой Солнце действует на Землю. Почему же мы говорим, что Земля вращается вокруг Солнца, а не наоборот? В дело в том, что масса Солнца много больше массы Земли, а из этого следует, что у Солнца куда меньшее ускорение чем у Земли и Солнце является более инерциальной СО чем Земля. Аналогичная ситуация с падением тела в поле тяжести Земли. Мы ведь не говорим, что Земля упала на яблоко?)*

4.2 Закон всемирного тяготения

Самым часто встречаемым взаимодействием в повседневной жизни, безусловно, является гравитационное взаимодействие, с которым мы сталкиваемся чуть-ли не каждый день. Гравитационное взаимодействие взаимодействие существует между любыми двумя телами, но, конечно, будет зависеть от расстояния, поэтому и мы и не всегда будем его чувствовать и учитывать.

4.2.1 Законы Кеплера

С еще давних времен люди смотрели на небо и наблюдали за движением звезд, планет и комет. Эти наблюдения стали потрясающей экспериментальной базой для изучения физики. Основываясь на этих наблюдениях удалось сформулировать ряд законов.

Определение 4.5 ***Первый закон Кеплера*** - *каждая планета (комета) вращается по эллипсу. в одном из фокусов которого находится Солнце.*

Определение 4.6 ***Второй закон Кеплера*** - *каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причем радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, за равные промежутки времени описывает равную площадь.*

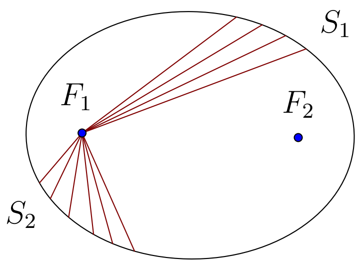


Рис. 4.2: Второй закон Кеплера

Для удобства, введем новое понятие.

Определение 4.6 *Секторная скорость - отношение площади заметаемой радиус-вектором за малый промежуток времени, к этому промежутку времени -* $\frac{\Delta S}{\Delta t}$

Тогда, второй Закон Кеплера означает постоянство секторной скорости:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = const \tag{4.4}$$

Теорема 4.1 *Третий закон Кеплера - квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.*

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \tag{4.5}$$

или

$$\frac{T^2}{a^3} = const \tag{4.6}$$

Нужно заметить, что данные утверждения также верны для спутников, только в роли Солнца выступает уже планета.
Законы Кеплера были получены экспериментально, в дальнейшем мы постараемся вывести их из более фундаментальных законов, таких как закон всемирного тяготения (пример 4.2) и закон сохранения момента импульса (раздел 8.5).

4.2.2 Закон всемирного тяготения.

Разумно было предположить, что сила взаимодействия между телами убывает с возрастанием расстояния меду ними. Первым более точную закономерность установил Гук, он заметил, что сила, с которой два тела притягиваются друг к другу, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

$$F \sim \frac{1}{r^2}$$

Чуть позже Ньютон дополнил формулу: он заметил, что сила притяжения так же прямо пропорционально зависит от массы тел.

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

В итоге закон всемирного тяготения приобрел всем нам знакомый вид:

Определение 4.7 *Закон всемирного тяготения - любые два тела, притягиваются друг к другу с силой прямо пропорциональной к массе тел и обратно пропорциональной к квадрату расстояния между ними.*

$$F = G\frac{m_1 m_2}{R^2} \tag{4.7}$$

где $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н м}^2}{\text{кг}^2}$ - гравитационная постоянная.
Можно записать закон всемирного тяготения в векторном виде:

$$\overrightarrow{F}_{1 \text{ на } 2} = G\frac{m_1 m_2}{|\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}|^3} \cdot (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}) \tag{4.8}$$

где $\overrightarrow{r_1}$ $\overrightarrow{r_2}$ - радиус-вектора двух тел.
Отметим, что масса фигурирующая в законе всемерного тяготения называется *гравитационной* . В большинстве современных теорий гравитационная масса и инертная равны друг другу (а на эксперименте не удается измерить разницу), поэтому в дальнейшем мы будет просто писать “масса” без уточнения.

4.2.3 Ускорение свободного падения

Безусловно, самым часто встречаемым случаем всемирного тяготения является движение в поле тяжести Земли.
Рассмотрим тело массы m, находящееся на расстояние h от поверхности Земли (или уровень моря).

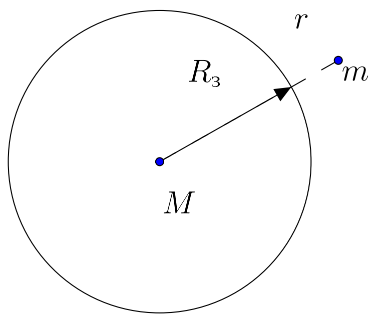


Рис. 4.3: Сила тяжести

$$F_{тяж} = G\frac{mM}{(R_з + h)^2} \tag{4.9}$$

Так как расстояние от уровня моря до человека пренебрежимо мало по сравнению с радиусом Земли ($R_з = 6370$ км), то можно записать:

$$F_{тяж} = G\frac{mM}{R_з^2} = mg, \tag{4.10}$$

$$g = \frac{GM}{R_з^2} = 9.8\frac{м}{с}. \tag{4.11}$$

Таким образом мы получили связь между ускорением свободного падения и гравитационной постоянной. Аналогично можно получить ускорение свободного падения на больших высотах, когда высота h уже сравнима с радиусом Земли $R_з$.

$$g(h) = \frac{GM}{(R_з + h)^2} \tag{4.12}$$

4.2.4 Сила притяжение внутри Земли

Куда интереснее обстоят дела если мы зарываемся в землю. С одной стороны, мы становимся ближе к центру, но с другой стороны, часть Земли перестает притягивать.

Теорема 4.2 ***Теорема Гаусса***: *гравитационное поле внутри однородной сферической оболочки равно нулю.*

То есть если мы погрузимся под Землю, внешние слои земли не будут влиять на гравитационное поле. По сути можно сказать, что сила, действующая со стороны внешнего ближнего слоя компенсирует силу со стороны внешнего дальнего слоя. Доказательство этой теоремы мы приводить не будем, а лишь скажем, что она доказывается в любом учебнике электростатики [2].

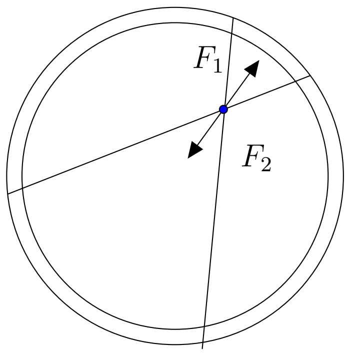


Рис. 4.4: Гравитация внутри сферы

Но мы можем попытаться объяснить на пальцах. Как видно из картинки, масса дальнего слоя больше, причем масса растет аналогично объему шаровому слою, то есть пропорционально квадрату радиуса. А сила притяжения убывает пропорционально квадрату радиуса. Из чего можно сделать вывод, что сила притяжения ближнего слоя будет скомпенсирована силой притяжения дальнего слоя.

$$\frac{F_1}{F_2} \sim \frac{m_1/R_1^2}{m_2/R_2^2} \tag{4.13}$$

$$\Rightarrow \sum \overrightarrow{F} = 0 \tag{4.14}$$

При $r > R$, сила притяжения зависит только от расстояния до центра Земли:

$$F(r) = G\frac{mM(r)}{r^2} \tag{4.15}$$

При "погружении под Землю", то есть $r < R$, меняется и масса Земли, которая действует на тело (здесь мы считаем плотность Земли ρ постоянной):

$$m(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$\Rightarrow F(r) = \frac{4G\rho\pi r^3 m}{3r^2} = \frac{4}{3}G\rho m\pi r \tag{4.16}$$

Или можем получить выражение для ускорения свободного падения под землей:

$$g(r) = \frac{4G\rho\pi r^3}{3r^2} = \frac{4}{3}G\rho\pi r \tag{4.17}$$

Таким образом внутри Земли сила тяжести (и ускорение свободного падения) зависит линейно от расстояния до центра, а снаружи убывает обратно пропорционально r^2.

4.2.5 Движение по круговой орбите

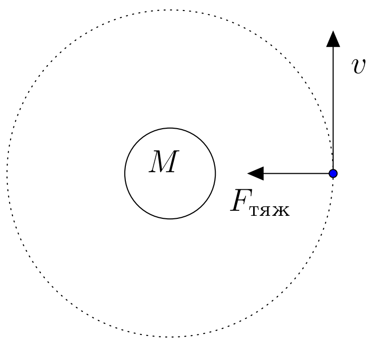


Рис. 4.5: Движение вокруг Земли

Рассмотрим тело, вращающееся вокруг Земли и выясним какая должна быть скорость тела, что бы оно могло вращаться вокруг Земли по орбите радиуса R. Зашипим для него второй закон Ньютона.

$$\overrightarrow{F}_{тяж} = m\overrightarrow{a}$$

Так так тело движется по окружности с постоянной скоростью, то $a = \frac{v^2}{R}$. Обратите внимание, сила тяжести изменяет только направление скорости. Тогда 2ЗН примет вид:

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{Mm}{R^2} \tag{4.18}$$

Отсюда находим скорость тела, вращающего по орбите радиуса R:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \tag{4.19}$$

Особую роль играет *околоземная орбита*, то есть орбита проходящая практически у поверхности Земли ($R \approx R_з$).

Определение 4.7 *Первая космическая скорость - скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно вращалось вокруг Земли по околоземной орбите.*

Таким образом для нахождения первой космической скорости мы должны принять радиус орбиты равный радиусу Земли и тогда получим:

$$v_{1\text{ косм}} = \sqrt{\frac{GM}{R_з}} = \sqrt{gR_з} = 7,8\frac{\text{км}}{\text{с}} \tag{4.20}$$

Однако, нужно понимать, что не все орбиты являются околоземными одним из важнейших примеров является геостационарная орбита.

Определение 4.8 *Геостационарная орбита - круговая орбита, расположенная над экватором Земли (0° широты), находясь на которой, искусственный спутник обращается вокруг планеты с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения Земли вокруг оси.*

Упражнение 4.1 *Найдите радиус геостационарной орбиты.*

Пример 4.2 *Доказать третий закон Кеплера (теорема 4.1) для круговых орбит.*

Пусть орбита имеет радиус R (а значит и большая полуось орбиты), тогда согласно (4.19) скорость движения по орбите будет $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Для периода обращения имеем:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \sqrt{\frac{2\pi^2 R^3}{GM}} \tag{4.21}$$

Осталось только посчитать интересующее нас отношение:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{R^3 GM}{2\pi^2 R^3} = \frac{GM}{2\pi^2} \tag{4.22}$$

Таким образом мы получили, что отношение куба большой полуоси орбиты (для круговой орбиты это просто радиус) к квадрату периода обращения зависит только от массы объекта вокруг которого происходит вращение о чем и гласит третий закон Кеплера. Обратите внимание, что это отношение одинаково для всех тел вращающихся вокруг одного и того же тела.

4.3 Сила упругости

Теперь мы можем приступить к рассмотрению взаимодействия тел, которые непосредственно контактируют друг с другом. Природа всех таких сил будет электромагнитная, такая сила возникает из-за взаимодействия молекул и атомов. Как вы могли замечать, зачастую такой контакт приводит к деформации тел.

Определение 4.9 *Деформация - процесс изменения формы или структуры тела, связанный движением частиц относительно друг друга.*

Определение 4.10 *Сила упругости - сила возникающая при деформации твердого тела и направленная в сторону, противоположную перемещению частиц тела при деформации.*

Для простоты повествования мы будем изучать только растяжение и сжатие твердого тела. Желающие изучить кручение, изгиб, и сдвиг могут могут обратиться к дополнительной литературе [5] или [6].

4.3.1 Модуль Юнга

Рассмотрим прямоугольное тело (например, резинку) площадью поперечного сечения S и длиной в недеформированном состоянии l_0, а в деформированном состоянии l. Для описания деформации введем несколько понятий.

$$\Delta l = l - l_0 \text{ — абсолютная деформация,} \tag{4.23}$$

$$\varepsilon = \frac{|\Delta l|}{l_0} \text{ — относительная деформация.} \tag{4.24}$$

Качественно можем установить, что удлинение резинки прямопропор-

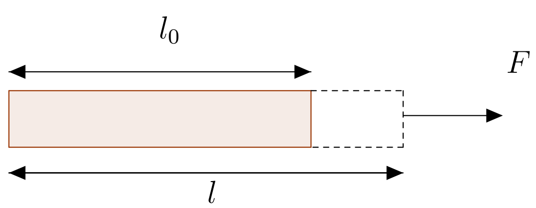


Рис. 4.6: Удлинение стрежня

ционально внешней силе, длине резинки и обратнопропорционально площади поперечного сечения.

$$\Delta l \sim F\frac{l_0}{S}$$

Коэффициент пропорциональности зависит от свойств материала и называется **модуль Юнга**:

$$E = \frac{\frac{F}{S}}{\frac{\Delta l}{l}} \tag{4.25}$$

Величина равная $\frac{F}{S}$ называется напряжением, хотя по смыслу означает давление оказываемое на поперечное сечение. Его мы будет обозначать σ. Тогда из (4.25) можем получить:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{4.26}$$

Это выражение называется **законом Гука в дифференциальной форме**. Нужно отметить, что мы только говорим про малые деформации, в случае больших деформация не будет такого линейного закона и про них можно прочитать в [5] или [6].

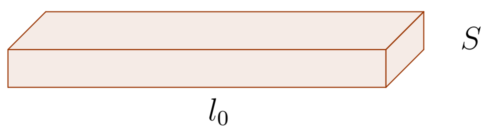


Рис. 4.7: Резинка

4.3.2 Закон Гука

Можно заметить, часто нас интересует только связь между удлинением пружинки (резинки) и внешней силой. Выразим из (4.26) силу упругости (а точнее ее модуль):

$$F = \frac{ES}{l}\Delta l \tag{4.27}$$

Тогда мы можем переписать в виде:

$$F = k\Delta l \tag{4.28}$$

где $[k] = \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ - коэффициент жесткости характеризует упругие свойства конкретного тела (а не материала как модуль Юнга).

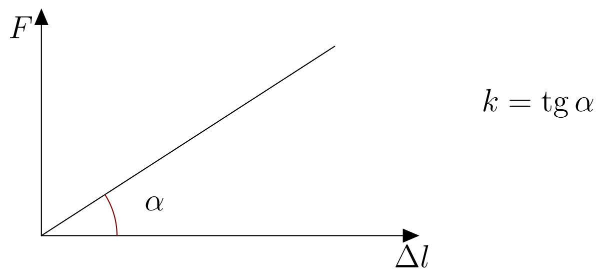


Рис. 4.8: График зависимость удлинения от силы

4.3.3 Координатная запись закона Гука

Очень важно при записи закона Гука не путаться в направление силы упругости. Для этого настоятельно рекомендуем пользоваться координатной записью закона Гука. Сила упругости, действующая на грузик

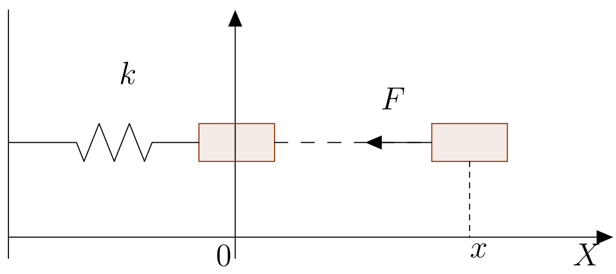


Рис. 4.9: Грузик на пружинке

со стороны пружинки направлена в противоположную сторону к деформации (как и все силы упругости)

$$F_x = -kx \tag{4.29}$$

4.3.4 Соединение пружинок

Часто в задачах или в реальной жизни встречаются соединенные пружинки и очень удобно бывает их заменить на одну эквивалентную. Пружинка будет эквивалентной, если она при той же внешней силе растянется на такую же величину.

а) Параллельное соединение пружинок. При параллельном соединение пружинок у них одинаковое удлинение, а силы упругости складываются, поэтому можем записать:

$$F = k_1\Delta x + k_2\Delta x = k\Delta x$$

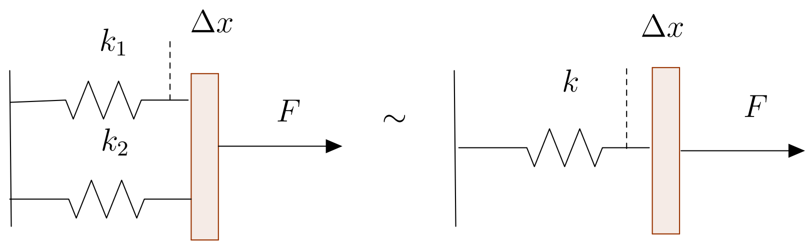


Рис. 4.10: Параллельное соединение пружинок

Тогда для эквивалентной пружинки получаем жесткость:

$$k = k_1 + k_2 \tag{4.30}$$

Действительно, жизненный опыт подсказывает, что добавление пружин усиливает подвеску автомобиля.

б) Последовательное соединение пружинок. При последовательном соединении сила упругости, возникающая в пружинках, одинаковая так как пружинки мы считаем невесомыми, а удлинения складываются.

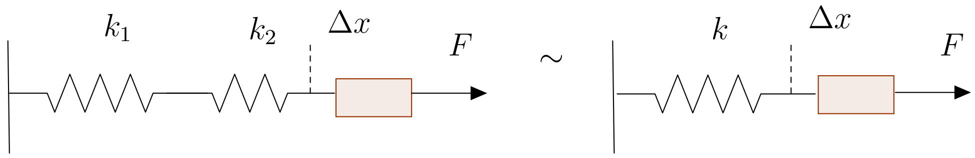


Рис. 4.11: Последовательное соединение пружинок

$$k_1 \Delta x_1 = F;\ k_2 \Delta x_2 = F$$

$$\Delta x_{\text{изм}} = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

Так как прилагаемая сила одинаковая, то при сокращении F получаем:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{4.31}$$

Таким образом, при последовательном соединение пружинок жесткость уменьшается. Действительно, растягивать длинную пружинку куда проще чем короткую.

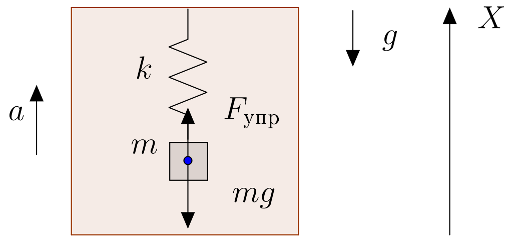


Рис. 4.12: Грузик на пружинке внутри лифта

Пример 4.3 *Грузик массы m висит на на пружинке жесткости k в лифте, который едет вверх с ускорением a. Найдите растяжение пружинки Δx*

Запишем второй закон Ньютона:

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{F}_{\text{упр}}$$

Спроецируем на ось X:

$$ma = -mg + k\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{m(g+a)}{k}$$

4.4 Силы реакции опоры и подвеса

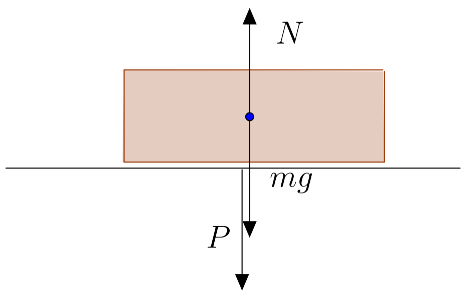
Зачастую контакт двух тел не приводит к деформации, или если быть точнее, мы пренебрегаем этими деформациями. Тогда говорим, что тела абсолютно твердые, жесткие, нерастяжимые и т.д. Но эти тела все равно взаимодействуют друг с другом. В таких случаях принято говорить о силе реакции опоры или подвеса. Стоит отметить, что силы реакции опоры и подвеса являются частным случаем силы упругости, просто деформация будет стремиться к нулю, а жесткость к бесконечности.

4.4.1 Сила реакции опоры. Вес

Возьмем тело, покоящееся на столе и рассмотрим все силы, действующие на него. На тело действует сила тяжести $m\overrightarrow{g}$ и сила со стороны стола $\overrightarrow{N}$, ее мы будем называть силой реакции опоры или силой нормальной реакции опоры.

Определение 4.11 *Сила реакции опоры - сила действующая со стороны опоры перпендикулярно границе контакта двух тел*

Согласно 3ЗН, тогда и тело будет действовать на стол с какой-то силой. Эту силу принято называть *весом или силой нормального давления* , хотя это есть обычная сила реакции опоры, действующая со стороны тела на опору. Стоит отметить, что парной (согласно 3ЗН) силой к силе



$\overrightarrow{P}$ – вес, сила нормального давления
$\overrightarrow{N}$ – сила реакции опоры

Рис. 4.13: Третий закон Ньютона для книги на столе

реакции опоры является вес, а не как многим кажется сила тяжести. Парной к силе тяжести действующей на тело со стороны Земли является сила тяжести действующая на Землю со стороны тела. Обычная такая путаница возникает, так как в самом простом случае:

$$|N| = |mg| = |P|. \tag{4.32}$$

Но нужно понимать, что сила реакции опоры N и сила тяжести mg приложены к одному телу, имеют разную природу и хотя бы поэтому не могут быть соответствующими друг другу из 3ЗН. В общем случае найти силу реакцию опоры можно только записав 2ЗН. Обратите на это внимание. Советуем вам при решении задач рисовать контактирующие тела не вплотную друг к другу, а с зазором, что бы по рисунку можно было однозначно определить к какому телу приложена та или иная сила. Например, в нашем случае при отсутствии зазора можно было бы подумать, что сила $\overrightarrow{P}$ действует на тело, а не на стол.

4.4.2 Сила натяжения нитки

Рассмотрим грузик, висячий на невесомой нитке. Почему он не падает? Очевидно, что вверх на него действует нитка. Силу действующую со стороны нитки на тело мы обозначим T и назовем *силой натяжения нити.* Сразу скажем, что грузик тоже действует на нитку, силой равной по модулю но противоположной по направлению. Очевидно, что природа этой силы опять электромагнитная, так как связь между атомами не позволяет нитки разорваться.

Важно отметить, что нитка (сила натяжения) всегда действует *вдоль нитки и направлена от точки контакта с телом*, на то она и нитка, а

не стержень.
Часто в задачах встречается модель *невесомой нитки*, что же означает? Возьмем произвольный участок нити массой $\Delta m = 0$, в разные стороны на него действуют соседние куски нитки с силами $\overrightarrow{T_1}$ и $\overrightarrow{T_2}$ запишем второй закон Ньютона:

$$T_1 - T_2 = \Delta m \overrightarrow{a} = 0 \tag{4.33}$$

Получаем, что $T_1 = T_2$, отсюда можно сделать вывод, что *в невесомой нитки сила натяжения на всей ее длине одинакова.* Если бы это было бы не так, то получалось, на кусочек массы ноль действовала ненулевая сила, а значит он двигался с бесконечным ускорением.

4.5 Сила трения

Вы, наверняка, замечали, что при попытке что-либо сдвинуть с места, данный предмет сдвигался не сразу, а только при определенной силе. А значит, есть какая-то сила, которая мешает телу двигаться. Такая сила, возникающая при контакте тел и сопротивляющаяся передвижению их относительно друг друга, называется **силой трения**. Существует несколько видов силы трения, однако мы будем рассматривать только силу сухого трения.

Определение 4.12 *Сила (сухого) трения - сила, возникающая между соприкасающимися твердыми телами из-за неровности поверхностей тел. Направлена всегда противоположно перемещению (или туда, куда тело бы двигалось без силы трения) и обусловлена взаимодействиями между атомами и молекулами.*

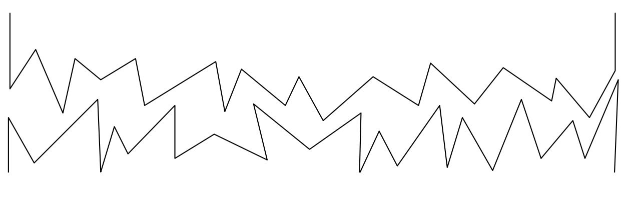


Рис. 4.14: Природа силы трения

Существуют три вида силы сухого трения:

- Сила трения покоя
- Сила трения скольжения
- Сила трения качения

Сила трения называется сухой, когда между контактирующими телами нет никакой смазки, жидкости и пр. В данном разделе мы не будем рассматривать силу трения качения, так как мы рассматриваем движение точечных тел.
О силе вязкого трения и силе трения качения подробно можно прочитать в [5] или [6].

4.5.1 Сила трения покоя и скольжения

Давайте проведем эксперимент. Поставим книгу на стол а начнем слабо действовать на нее по горизонтали. Тело все еще стоит на месте, хотя на нее действует внешняя сила. А значит есть еще какая-то сила сопротивляющаяся внешнему воздействию. Эта сила называется **силой трения покоя**. Очевидно, что при какой-то внешней силе книга начнет двигаться. В этот момент сила трения покоя достигает своего максимального значения и перестает меняться. Эта сила, равная максимальной силе трения покоя, и направленная против направления движения называется **силой трения скольжения**. Экспериментальный **Амонтона - Кулона** гласит:

$$F_{\text{тр}} = \mu N \tag{4.34}$$

μ -коэффициент трения, зависящий от свойств материалов контактирующих тел. Важно отметить, что сила трения зависит не от массы тела, а от силы реакции опоры.

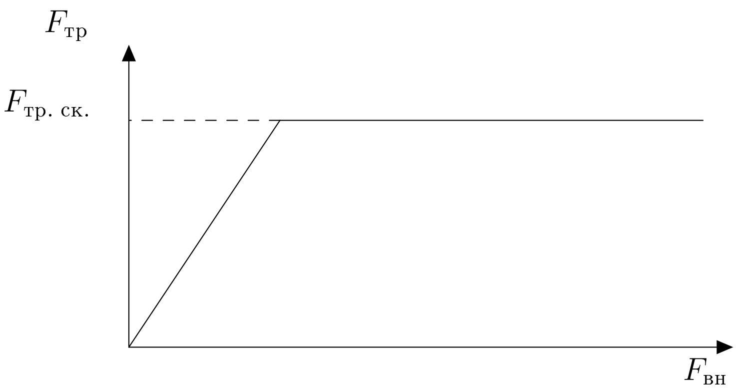


Рис. 4.15: График зависимости силы трения от внешней силы

Теперь можем разобрать несколько примеров, но прежде скажем, что во всех задачах мы действуем одинаково:

- Выбираем СО
- Рисуем все силы

- Записываем второй закон Ньютона в проекции на оси
- Задача решена

Пример 4.4 *Простой случай: найти ускорение тела.*

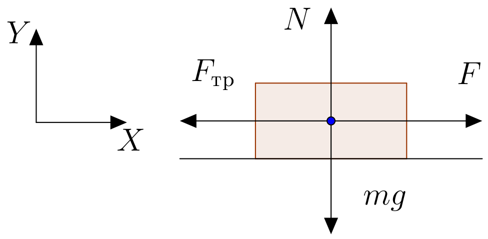


Рис. 4.16: Тело на столе

Запишем второй закон Ньютона[1], спроецировав на оси X и Y:

$$\begin{cases} F - F_{тр} = ma \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

1. Тело покоится; $a \leq 0$.
$$F - F_{тр} = 0$$
Такой случай возможен при $F < \mu N = \mu mg$.

2. Тело двигается; $a \geq 0$.
$$F - \mu mg = ma$$
$$a = \frac{F}{m} - \mu g$$

Пример 4.5 *Чуть более сложный случай: какую силу нужно приложить, чтобы сдвинуть тело?*

Запишем второй закон Ньютона:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - F_{тр} = ma \\ N + F\sin\alpha - mg = 0 \end{cases}$$

Чтобы сдвинуть тело, необходимо, чтобы $a \geq 0$, тогда

$$F\cos\alpha - \mu N \geq 0.$$

$$N = mg - F\sin\alpha$$

[1]Как вы могли уже заметить, в любой непонятной ситуации записываем второй закон Ньютона.

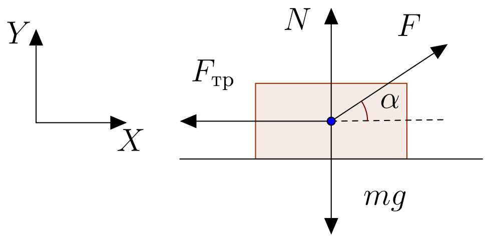


Рис. 4.17: Тело на полу

$$\Rightarrow\ F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) \geq 0$$

$$F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) \geq \mu mg$$

Отсюда мы можем выразить искомую силу:

$$F \geq \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

Пример 4.6 *Наклонная плоскость: при каком угле наклона плоскости тело начнет движение?*

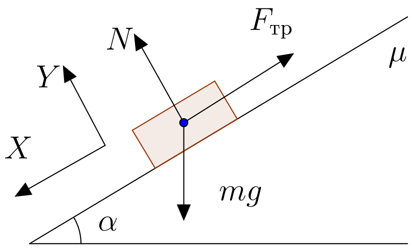


Рис. 4.18: Тело на наклонной плоскости

Запишем второй закон Ньютона для предельного случая (вот-вот и поедет)

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{тр} \leq 0 \\ N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha \leq N\mu \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ mg\sin\alpha \leq \mu mg\cos\alpha$$

Из этого выражения можно сделать вывод, что если

$$\operatorname{tg}\alpha \leq \mu,$$

то тело покоится;

Если

$$\operatorname{tg}\alpha > \mu,$$

то тело скатывается.

Пример 4.7 *Удивительный пример: найти силу, при которой тело не будет падать.*

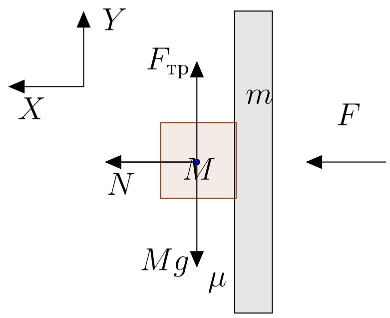


Рис. 4.19: Тело и немного другое тело

Заметим, что сила действует не только на тело массой m, но и на тело массой M, тогда

$$F = (M + m)a$$

Запишем второй закон Ньютона, спровоцировав на оси X и Y:

$$\begin{cases} F_{тр} - Mg > 0 \\ N = Ma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu N - Mg > 0 \\ N = M\dfrac{F}{M+m} \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение значение N из второго, получим:

$$\frac{\mu MF}{M+m} - Mg > 0$$

Из этого выражения получаем искомое значение силы:

$$F > \frac{g(M+m)}{\mu}$$

4.6 "Сила" инерции

Вы, наверняка, замечали, что когда машина ускоряется вас "прижимает" к спинке кресла, хотя и никакая новая сила не могла возникнуть. А возникало ли у вас желание записать 2ЗН относительно подающего лифта? Безусловно, ведь чем еще можно заняться в падающем лифте. Однако, падающий лифт и ускоряющая машина не являются инерциальными СО и с записью 2ЗН возникают проблемы. В этом разделе нашей задачей будет описание движения тела относительно неинерциальной системы отсчеты. Это оказывается очень удобно в некоторых случаях.

Пусть у нас есть система отсчета двигающаяся с ускорением $\overrightarrow{a}_{\text{с.о.}}$. Тогда мы можем связать ускорение тела относительно Земли (инерциальной СО) $\overrightarrow{a}$ с ускорением тела относительно неинерциальной СЩ $\overrightarrow{a}_{\text{относительное}}$

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}_{\text{с.о.}} + \overrightarrow{a}_{\text{относительное}} \tag{4.35}$$

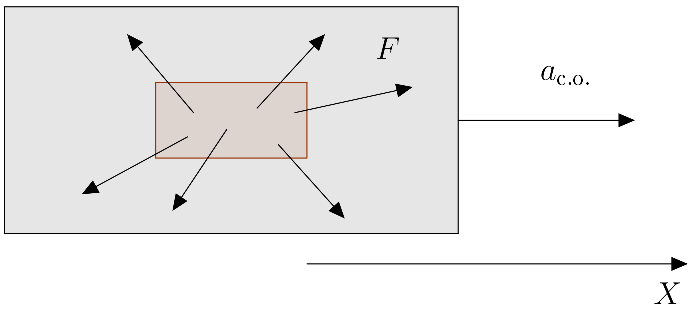


Рис. 4.20: Тело в неинерциальной системе отчета

Рассмотрим тело на которое действуют какие-то внешние силы. Запишем второй закон Ньютона относительно Земли:

$$\sum \overrightarrow{F} = m(\overrightarrow{a}_{\text{с.о.}} + \overrightarrow{a}_{\text{относительное}}) \tag{4.36}$$

Преобразуем выражение таким образом, что бы в левой части оказалась масса умноженная на ускорение относительно неинерциальной СО.

$$\sum \overrightarrow{F} - m\overrightarrow{a}_{\text{с.о.}} = m\overrightarrow{a}_{\text{относительное}} \tag{4.37}$$

Таким образом мы получили выражение очень похожее на 2ЗН, только к всем внешним силам добавилось слагаемое $-m\overrightarrow{a}$.

Определение 4.13 *"Сила", инерции - поправка, которую мы добавляем в левую часть второго закона Ньютона при переходе в неинерциальную систему отчета.*

Таким образом, мы можем спокойно записывать модифицированный 2ЗН, главное не забывать про “силу”, инерции. Кавычки не случайны. Нужно понимать, что это не какая-то реальная сила, а просто слагаемое, которое возникло для удобства решения задач при переходе в неинерциальную СО.

Пример 4.8 *Самым распространенным примером “силы” инерции является* ***центробежная сила****. Она “возникает” при переходе во вращающуюся СО, направлена от центра и равна* $-m\overrightarrow{a}$

Рассмотрим МКС, вращающуюся на околоземной орбите. На космонавта действует сила тяжести mg, но относительно МКС он покоится. Значит относительно МКС на него действует какая-то сила. Это и будет центробежная сила.

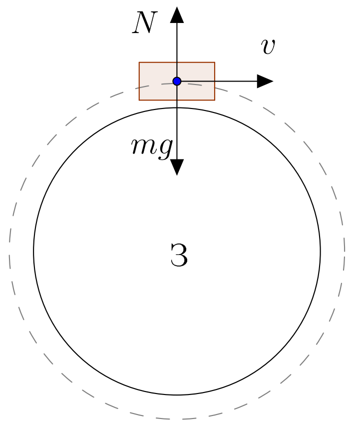


Рис. 4.21: Космическая станция вокруг Земли

Как мы уже изучили ранее (3.8), при движении по окружности тело приобретает центростремительное ускорение:

$$a_{\text{ц.}} = \frac{v^2}{R}.$$

Теперь запишем 2ЗН относительно МКС:

$$m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N} - m\overrightarrow{a}_{\text{ц.}} = 0$$

Невесомость будет достигнута при $N = 0$. Для лучшего понимания рассмотрим чуть более сложный пример.

Пример 4.9 *Уже знакомая наклонная плоскость: найти ускорение клина, при котором тело начнет двигаться вниз.*

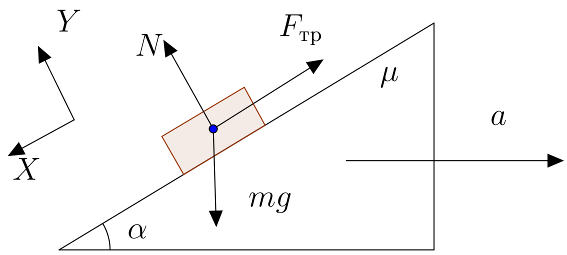


Рис. 4.22: Тело на движущемся клину

Рассмотрим такое ускорение клина, что грузик вот-вот и поедет вниз по клину, то есть его ускорение относительно клина будет равно нулю. Запишем второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета, связанной с клином, спроецировав на оси X и Y, не забыв так же про силу инерции $\overrightarrow{F}_{\text{ин.}} = -m\overrightarrow{a}$, возникающую при переходе в неинерциальную СО:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} + F_{\text{ин.}}\cos\alpha = 0 \\ N - mg\cos\alpha + F_{\text{ин.}}\sin\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - \mu N + ma\cos\alpha = 0 \\ N = mg\cos\alpha - ma\sin\alpha \end{cases}$$

$$mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha - ma\sin\alpha) + ma\cos\alpha = 0$$

$$ma\mu\sin\alpha + ma\cos\alpha = \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha$$

Сократив обе части неравенства на m и разделив на $(\mu\sin\alpha + \cos\alpha)$, получаем, что тело начнет движение при ускорении клина

$$a = g\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

4.7 Задачи на блоки

В данном разделе мы постараемся подробно разобрать один распространенный тип задач, а именно задачи на блоки. Рассматривать класс этих задач мы будем на одном пример, но решим его несколькими способами и поговорим о множестве сложных и интересных моментах.

Пример 4.10 *Найдите ускорение всех грузиков на картинке. Нитки невесомые и нерастяжимые, блоки невесомые.*

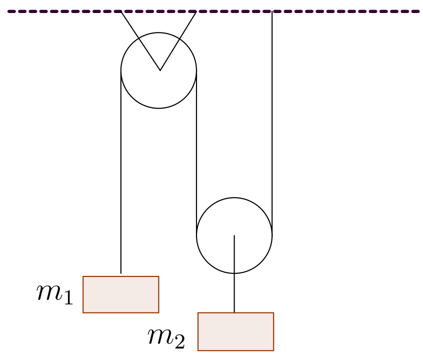


Рис. 4.23: Пример задачи

4.7.1 Идеализации при решении задач на блоки

Обычно в задачах на блок можно встретить следующими допущениями:

- Невесомая нитка
- Нерастяжимая нитка
- Невесомый блок
- Нет трения в оси блока (или сам блок идеально гладкий)

Давайте разберемся, что дает нам каждое из этих допущений. Но первоначально сформулирует важное утверждение:

Теорема 4.3 *Сумма сил действующих на тело массы ноль равна нулю.*

Это утверждение очевидно, однако мы решили его сформулировать, так как нам оно пригодится еще не раз.
Из **невесомости нитки** следует, что ее сила натяжения на все длине одинакова. Так как на произвольный кусок нитки действуют только силы натяжения со стороны соседних кусков (сил трения нет, так как **блок гладкий**)
Из **невесомости блока** следует, что сумма сил действующих на него равна 0, а значит $T_2 = 2T_1$.
А из **нерастяжимости нитки** мы будем получать условие кинематической связи. Это будет самым важным и сложным.

4.7.2 Общий подход при решении задач на блоки

Здесь мы попытаемся привести общую последовательность действий при решении типичной задачи на блок.

- Нарисовать все силы
- Выбрать систему координат
- Выбрать направление ускорений (лучше все выбирать вдоль осей, но это не важно)
- Для каждого тело записать второй закон Ньютона

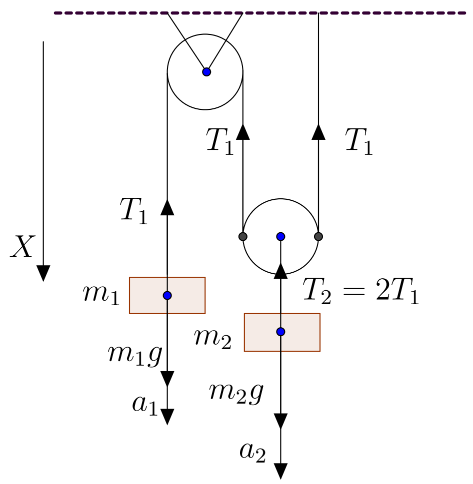


Рис. 4.24: Пример задачи. Силы

Тогда мы получаем такую систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1g - T_1 = m_1a_1 \\ m_2g - 2T_1 = m_2a_2 \end{cases}$$

Видно, что каждый грузик дает нам один второй закон Ньютона, но и одно неизвестное ускорение - тут полный паритет. А вот сила натяжения нитки является лишней неизвестной (в данном случае три неизвестных и два уравнения), однако эта же нитка позволит нам связать ускорения грузиков (так как она нерастяжима) и записать уравнение кинематической связи. И тогда количество уравнений будет равно количеству неизвестных. Следующие несколько пунктов мы посвятим различным способам получения уравнение кинематической связи.

4.7.3 Метод одного сантиметра

Прежде чем приступать к составлению кинематической связи, хочется отметить один важный момент. Так как первоначально все грузики покоились, то перемещение грузика будет пропорционально ускорению ($\Delta x = \frac{a\Delta t^2}{2}$), а значит нам будет достаточно найти связь между перемещениями. Раз нам нужно найти свзять между перемещениями, то проще всего сдвинуть один грузин на один сантиметр и посмотреть на сколько и куда сдвинется второй. Именно по этому метод так и называется, однако обычно мы будем сдвигать грузик не на один сантиметр, а на какую-то величину Δx. Для использования метода одного сантиметра очень удобно рисовать не саму схему блоков с ниткой, а модель этой схемы, на которой блоки отсутствуют, а все нитки под прямыми углами:

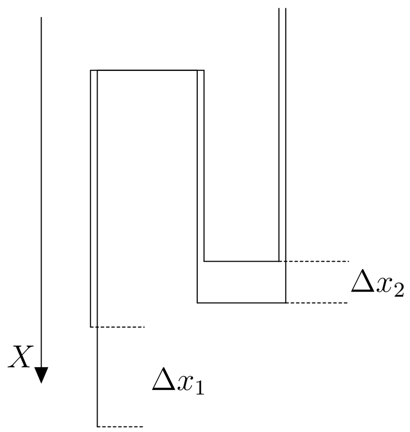


Рис. 4.25: Метод одного сантиметра

Нарисуем нитку в какой-то момент времени, а потом после того, как правый грузик поднимется вверх на Δx_2. Так как длинна нитки постоянна, то очевидно, что левый грузик опустится вниз на $2\Delta x_2$. Тогда, не забывая про направление движения грузиков, мы можем записать:

$$\Delta x_1 = -2\Delta x_2$$

Тогда, переходя к ускорениям получим уравнение кинематической связи:

$$a_1 + 2a_2 = 0 \tag{4.38}$$

Отметим, что здесь ускорения (и перемещения) мы измеряем вдоль оси OX, и разумно, что одно из ускорений обязательно будет отрицательным. Важно отметить, что если грузиков несколько, то мы действуем сходим образом: сдвигаем все гурзики кроме одно на Δx_1, Δx_2, Δx_3 ... Δx_{N-1}, из постоянства длинны нитки находим перемещение последнего грузика Δx_N.

4.7.4 Запись длины нитки

Данный способ напрашивается сам собой: раз длинна нитки постоянная, так давайте запишем эту длину и скажем, что ее производная по времени равна нулю. Будем записывать длину нитки через координаты:

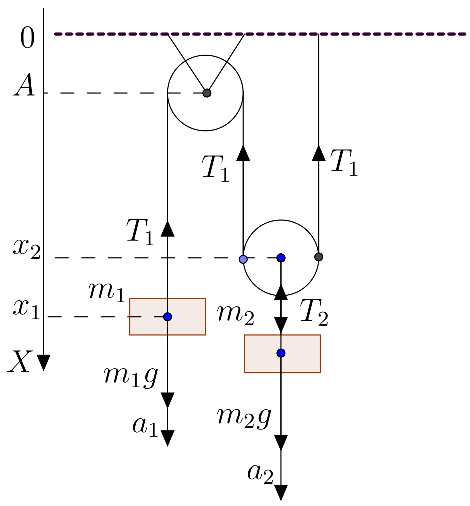


Рис. 4.26: Координатная запись длины нитки

$$L = x_1 - A + x_2 - A + x_2 + \text{длина нитки на блоках}$$

Взяв производную по времени получим:

$$v_1 + 2v_2 = 0$$

где, v_1 - скорость первого грузика, а v_2 - скорость второго блока и грузика (так как они связаны ниткой). Взяв еще одну производную получаем связь на ускорения:

$$a_1 + 2a_2 = 0$$

Заметим, что здесь ускорение равно второй производно по координате так как мы все ускорения направили вдоль оси. Очевидно, что подобные действия можно провести всегда.

4.7.5 Царский метод

Предыдущий метод очень хорош, и позволяет всегда получить уравнение кинематической связи. Однако, существует поистине “царская дорога”. Сначала приведем его описание без доказательства работоспособности.

- Обозначить все точки контакта нитки с подвижным объектом.

- В каждой точки контакта нитки с подвижным объектом задать вопрос: "Сила натяжения нитки сонаправлена ускорению этого подвижного объекта?"

- Если ответ “да”, то написать в уравнение кинематической связи ускорение этого объекта с знаком “плюс”, если нет, то с знаком “минус”.

- Приравнять нулю.

- Условие кинематической связи перед вами.

Важные замечания:

- Удобно всегда все ускорения направлять вдоль осей, тогда вопрос будет совсем простой “Сила натяжения сонаправлена оси или нет?”

- Если объект двигает по двум осям, то вас при рассмотрение какой-то конкретной точки интересует подвижность объекта по оси вдоль (или против) которой действует сила натяжения нити.

Все это очень похоже на магию, но мы же не будет использовать магию за пределами Хогвартса. Нам придется немного забежать вперед, чтобы доказать метод. Если следующие строчки будут непонятны, то советуем вернуться к ним после изучения главы(7) “Энергия”.
Все дело в том, что нерастяжимая нитка не может запасти в себе энергию (в отличии от пружинки) и поэтому полная работа нитки обязана быть равна нулю. А где нитка может совершать работу? Правильно, только в точках контакта нитки с подвижным объектом, тогда для каждой такой точки можем записать работу и получить суммарную работу нитки:

$$A_{\text{нитки}} = \sum_i \overrightarrow{T_i} \cdot \Delta \overrightarrow{r_i} = 0$$

Уже здесь видно, что знак работы зависит от сонаправленности перемещения (а значит и ускорения, так как начальная скорость ноль) и силы натяжения нитки. Поделив на Δt получим:

$$\sum_i \overrightarrow{T_i} \cdot \overrightarrow{v_i} = 0$$

Возьмем производную по времени:

$$\sum_i \overrightarrow{T_i} \cdot \overrightarrow{a_i} = 0$$

Как мы помним сила натяжения нитки одинаковая, то есть мы можем поделить эту сумму на T и тогда у нас просто останется сумма:

$$\sum_i \pm a_i = 0$$

где знак как раз и зависит от того, сонаправлена сила натяжения нитки с ускорением или нет. Надеемся, теперь используя "царский метод", читатель будет применять его не бездумно, а осознавая причины его работоспособности.

Методов для получения уравнения кинематической связи и решения задачи на блоки существует множество, нашей целью было показать несколько принципиально разных подходов, а каким пользоваться решать читателю.

Глава 5

Динамика твердого тела

Я не могу думать о вас и о себе отдельно.
Вы и я для меня одно.

"Анна Каренина", Лев Толстой

В предыдущих разделах мы изучали движение материальной точки, однако не всегда для описания движения тело подходит такая модель. В этом разделе мы познакомимся с новой моделью.

Определение 5.1 *Абсолютно твердое тело - физическая модель тела (системы тел), в которой расстояние между любыми двумя точка остается неизменным с течением времени.*

Хочется обратить внимание, что для нас тело и система тел будут эквивалентными понятиями, так как любое тело состоит из более мелких тел (молекул, атомов и т.д). При описание движения твердого тело принято выделять несколько типов движения.

Определение 5.2 *Поступательное движение - движение, при котором отрезок соединяющий любые две точки тела двигается параллельно себе.*

Определение 5.3 *Вращательное движение вокруг неподвижной оси - движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых находятся на одной прямой, перпендикулярной плоскости этих окружностей. Сама эта прямая есть ось вращения.*

Определение 5.4 *Плоскопараллельное (плоское) движение - движение, при котором каждая точка движется всё время в одной плоскости. Причем все плоскости, в которых движутся точки, параллельны между собой.*

В нашей книге мы будем рассматривать только плоскопараллельное движение, поэтому при вращении вокруг оси (перпендикулярной плоскостям движений частиц тела) мы будем записывать, как вращение относительно точки.

5.1 Центр масс

Для описания положения твердого тела в пространстве, очевидно, будет недостаточно одного радиус вектора, а будет требоваться, например, радиус вектор какой-нибудь особенной точки и углы ориентации в пространстве (как например, крен, рысканье и тангаж в самолете).

Определение 5.5 *Центр масс тела (системы тел или точек) - это точка, радиус-вектор которой удовлетворяет выражению:*

$$\overrightarrow{r}_c = \frac{\sum_i \overrightarrow{r}_i m_i}{\sum_i m_i} \tag{5.1}$$

Хочется отметить, что радиус вектора мы можем выбирать в любой СО, но все равно мы будет получать одну и ту же точку. Что бы прочувствовать лучше это определение, мы можем провести небольшие преобразования:

$$\sum_i (\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_c) m_i = 0 \tag{5.2}$$

Вектор $\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_c$ - это вектор из центра масс в i-ю точку тела. Таким образом, мы можем сказать, что центр масс это точка из которой если провести вектора во все точки и домножить на массу, то в сумме получится ноль.

Упражнение 5.1 *Докажите, что центр двух тел будет совпадать центром масс центров масс этих тел. То есть:*

$$\overrightarrow{r}_{1+2} = \frac{\overrightarrow{r}_1 m_1 + \overrightarrow{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

Хочется отметить, что если нужно найти координаты центра масс, то никто не запрещает нам спроецировать определение центра масса, например, на ось x:

$$x_c = \frac{\sum_i x_i m_i}{\sum_i m_i} \tag{5.3}$$

5.1.1 Теорема о движении центра масс

Естественно предположить, что мы не просто так ввели понятия центра масс и он нам пригодится для описания движения твердого тела.

Теорема 5.1 *Теорема о движении центра масс - центр масс движется так, как двигалась бы материальная точка с массой, равной массе тела, под действием тех же сил:*

$$m\overrightarrow{a}_{ц.м.} = \sum_{i=1} \overrightarrow{F}_{внеш.i}$$

Доказательство: Для любой точки можем записать 2ЗН:

$$m_i\overrightarrow{a}_i = \overrightarrow{F}_{\text{внеш.}i} + \sum_{i\neq j} \overrightarrow{F}_{ij}$$

где $\overrightarrow{F}_{ij}$ - сила действующая на i-ую точку со стороны j-ой. Просуммируем по всем точкам:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F}_{\text{внеш.}i} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \overrightarrow{F}_{ij}$$

Так как по 3ЗН $\overrightarrow{F}_{ij} + \overrightarrow{F}_{ji} = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F}_{\text{внеш.}i}$$

или

$$m\overrightarrow{a}_{\text{ц}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F}_{\text{внеш.}i}$$

Таким образом, мы можем сказать, что центр масс это не просто какая-то математическая абстракция, а очень удобная точка для описания движения твердого тела - записываю сумму всех сил действующих на тело мы получим массу всего тела умноженную на ускорение центра масс.

5.2 Момент силы

Прежде чем перейти к изучению статики и динамики твердого тела нужно познакомиться с одним важным понятием, ответственным за вращение твердого тела - *момент сил.* В общем случае следует отличать момент силы *относительно точки* и *относительно оси.* Момент силы (да и любого другого вектора) относительно точки будет *вектором*, а относительно оси будет *проекцией* его момента силы относительно точки, лежачей на этой оси, на эту ось.

5.2.1 Момент силы относительно точки

Начнем изучение с момента силы относительно точки.

Определение 5.6 *Моментом силы* $\overrightarrow{F}$ *относительно точки* O *называется векторное произведение радиус-вектора* $\overrightarrow{r}$ *(направлен из точки* O *в точку приложения силы) на силу* $\overrightarrow{F}$*:*

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F}$$

Упражнение 5.2 *Докажете, что момент силы относительно точки не изменится, если точку приложения силы сдвинуть вдоль прямой действия силы.*

5.2.2 Момент силы относительно неподвижной оси

Теперь познакомимся с моментом силы относительно оси.

Определение 5.7 *Момент силы относительно произвольной оси* X *это проекция вектора момента силы относительно точки* O*, являющейся началом оси* X*, на ось* X*.*

Рассмотрим важный случай, когда вектора $\overrightarrow{F}$ и $\overrightarrow{r}$ в любой момент времени перпендикулярны оси X, этот случай и будет соответствовать плоскому движению и тогда без ограничения общности можно взять точку O в этой плоскости. В этом случае вектор момента силы будет коллинеарен оси X, тогда момент сил относительно оси X можно будет легко выразить через угол между векторами $\overrightarrow{r}$ и $\overrightarrow{F}$:

$$M_x = rF \cdot \sin(\overrightarrow{r}; \overrightarrow{F}) \tag{5.4}$$

Видно, что здесь в зависимости от угла проекция может быть отрицательная или положительная.
Заметим, что $r \sin(\overrightarrow{r}; \overrightarrow{F})$ это расстояние между осью X и прямой вдоль которой действует сила, это расстояние называется *плечом силы.*

Определение 5.8 *Плечо силы относительно оси - кратчайшее расстояние между осью и прямой вдоль которой действует сила.*

Тогда мы можем сформулировать очень часто используемое определение момента силы относительно оси:

Определение 5.9 *Момент силы относительно оси - произведение силы на плечо силы относительно оси.*

Отметим, что при рассмотрении плоского движения, мы зачастую не будем уточнять какой именно момент сил мы имеем в виду: относительно точки ли относительно оси. Связанно это с тем, что вектор момента силы относительно точки будет коллинеарен выбранной оси X, а значит модуль момента силы относительно точки O будет равен моменту силы относительно оси X с точностью до знака:

$$|M_x| = |\overrightarrow{M}| \tag{5.5}$$

Нужно быть только внимательным с знаками при суммировании моментов сил относительно оси, и не забывать, что если вектор момента силы относительно точки был сонаправлен оси X, то проекция, а значит и момент силы относительно оси положителен, а иначе - отрицателен.

5.2.3 Центр тяжести

Определение 5.10 *Центр тяжести - точка, относительно которой сумма моментов всех сил тяжести равна нулю.*

$$\sum(\overrightarrow{r}_{\text{ц.т.}} - \overrightarrow{r}_i) \times \overrightarrow{F}_i = 0 \tag{5.6}$$

Заметим, что в случае однородного гравитационного поля мы можем сказать, что $\overrightarrow{F}_i = m_i\overrightarrow{g}$ для центра тяжести можем получить:

$$\sum(\overrightarrow{r}_{\text{ц.т.}} - \overrightarrow{r}_i)m_i \times \overrightarrow{g} = 0 \tag{5.7}$$

и сократив на $\overrightarrow{g}$ получим выражение знакомое нам по центру масс (5.2):

$$\sum_i(\overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_c)m_i = 0 \tag{5.8}$$

Из этого следует, что центр тяжести совпадает с центром масс в однородном гравитационном поле, однако в общем случае это не верно. Однако, зачастую в задачах понятие центра масс и центра тяжести считаются эквивалентными, так как вблизи поверхности Земли гравитационное поле можно считать однородным. Забегая вперед, скажем, если в центр тяжести воткнуть иголочку то тело окажется в равновесие, а вот почему мы поймем в следующем разделе.

5.3 Закон вращательного движения

Теперь, наконец-то посмотрим для чего мы вводили понятие момента сил, а именно для изучения вращательного движения.

5.3.1 Вращение материальной точки относительно неподвижной оси

Рассмотрим материальную точку, двигающуюся в плоскости перпендикулярной некой оси X и пересекающей эту плоскость в точке O (см. рис. (5.1)).

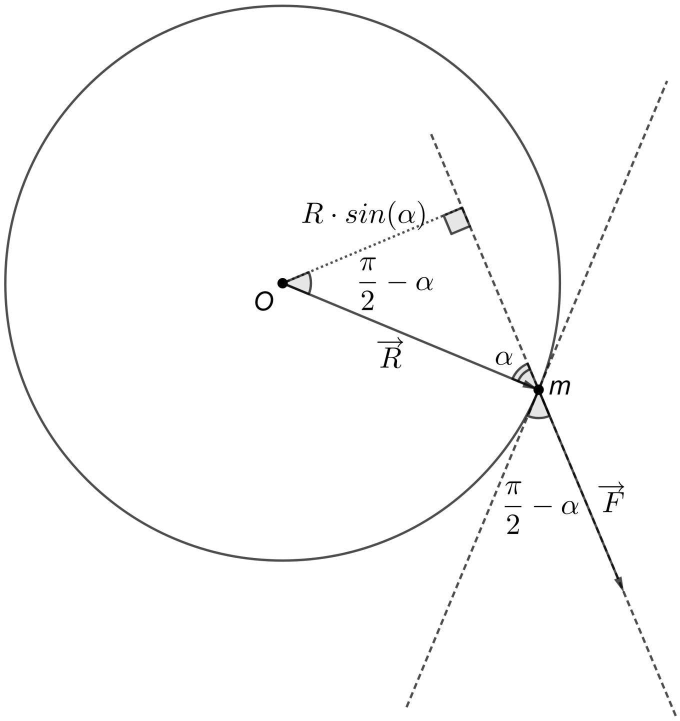


Рис. 5.1: Вращательное движение материальной точки

Пусть радиус вектор этой точки $\overrightarrow{R}$, и на нее действует сила $\overrightarrow{F}$. Тогда можно записать 2ЗН:

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$$

Спроецируем его на ось, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{R}$, то есть получим касательное (тангенциальное ускорение):

$$ma_\tau = F\sin(\overrightarrow{R}; \overrightarrow{F})$$

Домножим на R и вспомним, что $a_\tau = R\beta_x$, где β_x - угловое ускорение относительно оси X:

$$mR^2\beta_x = FR\sin(\overrightarrow{R}; \overrightarrow{F})$$

Не сложно заметить, что выражение справа является моментом силы $\overrightarrow{F}$ относительно оси X (5.4). Тогда мы можем записать *закон вращательного движение для материальной точки относительно произвольной неподвижной оси* X

$$mR^2\beta_x = M_x \tag{5.9}$$

Это выражение кажется достаточно бесполезным, однако оно нам пригодится для получения закона вращательного движения твердого тела.

5.3.2 Вращение твердого тела относительно неподвижной оси

Теперь рассмотрим вращение твердого тела относительно оси X. Запишем выражение (5.9) для каждой точки, при этом индекс оси X мы опустим ради краткости записи:

$$m_i R_i^2 \beta = M_i$$

Здесь R_i - расстояние от оси X до i-ой точки. Обратите внимания, что угловое ускорение у всех точек твердого тела одинаковое. Отметим, что все точки вращаются по окружностям центры которых лежат на оси вращения X. Тогда можем просуммировать для всех точек:

$$\sum_i m_i R_i^2 \cdot \beta = \sum_i M_i$$

Определение 5.11 *Моментом инерции тела относительно оси называется следующая сумма:*

$$J = \sum m_i R_i^2$$

где m_i - масса материальных точек из которых состоит тело, а R_i - расстояние от оси до этих точек. Момент инерции является мерой способности тела сопротивляться его раскручиванию:

Тогда для твердого тела мы можем сформулировать закон вращательного движения:

Теорема 5.2 ***Закон вращательного движения**: сумма моментов внешних сил, действующих на тело относительно некоторой оси равна произведению момента инерции относительно этой оси на угловое ускорение.*

$$\sum_i M_i = J \cdot \beta \tag{5.10}$$

В очередной раз отметим, мы рассматриваем только плоское движение, то есть все вращение происходило относительно одной оси, однако при рассмотрении более сложного типа движения мы будем действовать схожим образом: можно в каждый момент времени сложное вращение представить как вращение относительно трех взаимно перпендикулярных осей, то есть записать три закона вращательного движения, каждый из которых будет описывать вращение в плоскости перпендикулярной одной из этих осей:

$$\begin{cases} J_x\beta_x = \sum M_x \\ J_y\beta_y = \sum M_y \\ J_z\beta_z = \sum M_z \end{cases} \tag{5.11}$$

Здесь, все моменты инерции и моменты сил уже считается каждый относительно своей оси. Подробнее про сложное движение твердого тела читайте в [5], [6] или [7].

5.3.3 Плоское движение твердого тела

Как видно, закон вращательного движения (5.10) очень напоминает 2ЗН (4.1): аналог силы - момент силы, аналог ускорения - угловое ускорение, аналог массы - момент инерции. Поэтому мы можем говорить, момент инерции показывает как сложно раскручивать тело. В итоге мы можем получить систему уравнений описывающих плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела.

Теорема 5.3 ***О плоском движении тела***. *Плоское движение твердого тела можно разбить на поступательное движение центра масс и вращательное движение относительно оси проходящей через центр масс. Плоское движение будет описываться системой уравнений:*

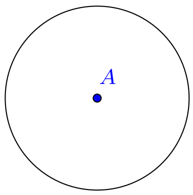
$$\begin{cases} m\overrightarrow{a}_{\text{ц}} = \sum \overrightarrow{F} \\ J_c\beta_c = \sum M_c \end{cases} \tag{5.12}$$

Здесь J_c, β_c и $\sum M_c$ - соответственно момент инерции, угловое ускорение и момент сил относительно оси проходящей через центр масс.

5.3.4 Моменты инерции некоторых симметричных тел

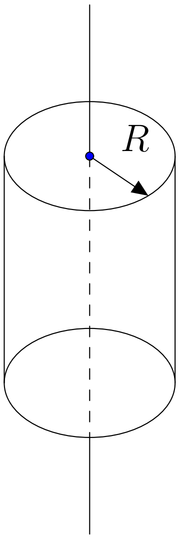
Как видно из закона вращательного движения, нам крайне необходимо знать момент инерции тела. В этом пункте приведем самые распространенные моменты инерции, а доказательства оставим на совести добросовестного читателя.

Пример 5.1 *Кольцо, относительно оси симметрии:*



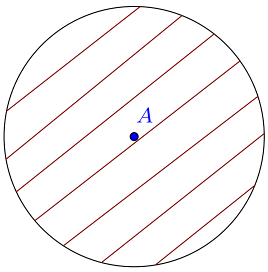
$$J = mR^2 \tag{5.13}$$

Пример 5.2 *Тонкостенный цилиндр, относительно оси симметрии:*



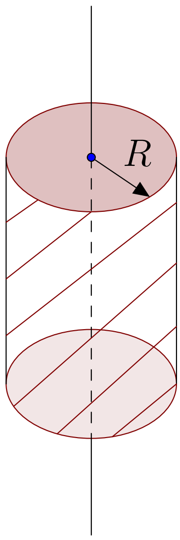
$$J = mR^2 \tag{5.14}$$

Пример 5.3 *Диск, относительно оси симметрии:*



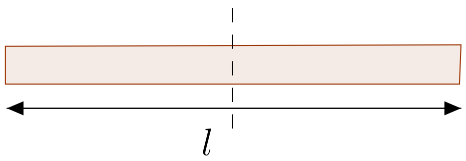
$$J = \frac{mR^2}{2} \tag{5.15}$$

Пример 5.4 *Сплошной цилиндр, относительно оси симметрии:*



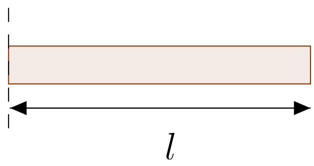
$$\frac{mR^2}{2} \tag{5.16}$$

Пример 5.5 *Стержень, относительно перпендикулярной стержню оси, проходящей через его середину:*



$$J = \frac{ml^2}{12} \tag{5.17}$$

Пример 5.6 *Стержень, относительно перпендикулярной стержню оси, проходящей через его край:*



$$J = \frac{ml^2}{3} \tag{5.18}$$

5.3.5 Теорема Гюйгенса - Штейнера

В предыдущем пункте мы записали момент инерции стержня относительно двух параллельных осей. Есть мнение, что все это запомнить невозможно, да и не нужно. Нужно просто научиться выражать момент инерции относительно произвольной оси, зная момент инерции относительно какой-нибудь хорошей.

Теорема 5.4 *Теорема Гюйгенса-Штейна - момент инерции относительно произвольной оси A равен сумме момента инерции относительно оси параллельной оси A и проходящей через центр масс и массы тела, умноженной на расстояние между этими осями в квадрате:*

$$J_A = J_{\text{ц.м.}} + mr^2_{A\to\text{ц.м.}} \tag{5.19}$$

Доказательство:

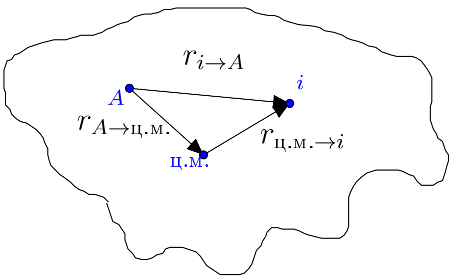


Рис. 5.2: Произвольное тело

Распишем по определению момент инерции относительно оси, проходящей через точку A:

$$J_A = \sum_i m_i r^2_{A\to i}$$

Из закона сложения векторов:

$$\overrightarrow{r}_{A\to i} = \overrightarrow{r}_{A\to\text{ц.м.}} + \overrightarrow{r}_{\text{ц.м.}\to i}$$

Тогда:

$$J_A = \sum_i m_i(\overrightarrow{r}_{A\to\text{ц.м.}} + \overrightarrow{r}_{\text{ц.м.}\to i})^2 =$$

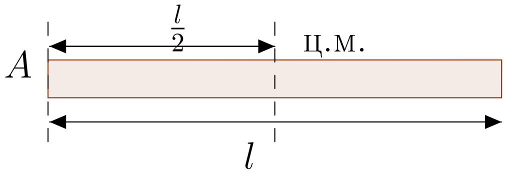
$$= \sum_i m_i r^2_{A\to\text{ц.м.}} + \sum_i m_i r^2_{\text{ц.м.}\to i} + 2\sum_i m_i \overrightarrow{r}_{A\to\text{ц.м.}} \overrightarrow{r}_{\text{ц.м.}\to i} =$$

$$= mr^2_{A\to\text{ц.м.}} + J_{\text{ц.м.}} + 2\overrightarrow{r}_{A\to\text{ц.м.}} \cdot \sum_i m_i \overrightarrow{r}_{\text{ц.м.}\to i}$$

Из определения центра масс $\sum_i m_i r_{\text{ц.м.}\to i} = 0$, тогда:

$$J_A = mr^2_{A\to\text{ц.м.}} + J_{\text{ц.м.}}$$

Пример 5.7 *Зная момент инерции стержня, относительно оси, проходящей через центр, найти момент инерции относительно оси, проходящей через край стержня.*



$$J_{ц.м.} = \frac{ml^2}{12}$$

Используя теорему Гюйгенса-Штейнера, найдем момент инерции относительно A:

$$J_A = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$$

5.4 Статика

Как вы могли заметить, не все тела вокруг двигаются или вращаются. Большинство тел покоятся относительно какой-нибудь инерциальной СО. Давайте ответим на один важный вопрос: когда твердое тело будет находится в состояние покоя? Но прежде выясним, что такое равновесие.

Определение 5.12 *Равновесие - состояние тела, при котором все точки тела находятся в покое.*

Определение 5.13 *Статика - раздел механики, в котором изучаются условия равновесия тел.*

Статика является частным случаем динамика вращательного движения, а значит условие равновесия твердого тела мы сможем получить из системы уравнений, описывающих динамику вращательного движения(5.12):

1. Центр масс покоится - сумма всех сил действующих на тело равна нулю.

2. Отсутствует вращение - сумма моментов сил действующих на тело относительно любой оси равна нулю.

Важно отметить, что равенство нулю суммы сил и суммы момента сил означает только, что ускорение центра масс и угловое ускорение равно нулю, но это не означает, что тело покоится. Центр масс может РПД и тело вращаться с постоянной угловой скоростью. Однако, в большинстве задач тело первоначально покоится и поэтому, приведенные выше требования достаточны для положения равновесия. Теперь мы можем сформулировать несколько забавных теорем.

Теорема 5.5 *Если сумма сил действующих на тело и сумма моментов сил относительно одной точки равна нулю, то сумма моментов сил относительно любой точки рана нулю.*

Пусть сумма моментов сил относительно точки A равна нулю. Запишем сумму моментов сил относительно точки B:

$$\overrightarrow{M}_B = \sum_i \overrightarrow{r}_{Bi} \times \overrightarrow{F}_i = \sum_i (\overrightarrow{r}_{Ai} + \overrightarrow{BA}) \times \overrightarrow{F}_i = \sum_i \overrightarrow{r}_{Ai} \times \overrightarrow{F}_i + \overrightarrow{BA} \times \sum_i \overrightarrow{F}_i$$

Первое слагаемое будет равно нулю, так как это сумма моментов сил относительно точки A. А вторая сумма равна нулю, та как это сумма всех сил, действующих на тело. А значит и сумма моментов сил относительно произвольной точки B равна нулю.
Следующие теоремы мы приведем без доказательства, в качестве упражнения для читателя.

Теорема 5.6 *Если в центр тяжести "воткнуть" иголочку, то тело будет находится в положение равновесия.*

Теорема 5.7 *Если повесить тело за любую точку, то центр тяжести будет находится на вертикальной прямой, проходящей через эту точку.*

Глава 6

Импульс

Один сделанный шаг придает силы.

"Нетерпение сердца", Стефан Цвейг

Как мы уже отмечали в разделе 5.3 законов Ньютона и закона вращательного движения достаточно для описания движения твердого тела, однако во многих задачах оказывается удобным пользоваться новым понятием - **импульсом**. Исторически импульс появился в натурфилософской **теории импетуса**. Мы же в данной главе не будем останавливаться на истории импульса, а изучим законы связанные с ним и рассмотрим примеры его применения.

6.1 Импульс материальной точки

Определение 6.1 *Импульс материальной точки - это векторная физическая величина, равная произведению массы тела на его скорость, направление импульса сонаправлено с направлением вектора скорости.*

$$\overrightarrow{p} = m\overrightarrow{v} \tag{6.1}$$

$$[p] = [\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}] = [\text{Н} \cdot \text{с}] \tag{6.2}$$

Пусть $\overrightarrow{F}$- равнодействующая сила, действующая на это тело массой m. Запишем второй закон Ньютона:

$$\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}. \tag{6.3}$$

Как Вы уже знаете,ускорение тела a равно производной вектора скорости. Применив эти знания, чуть изменим формулу (6.3) :

$$\overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}.$$

Внесем массу под знак дифференциала:

$$\overrightarrow{F} = \frac{d(m\overrightarrow{v})}{dt}.$$

Заметим, что $m\overrightarrow{v}$ по определению импульс тела.

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \tag{6.4}$$

Определение 6.2 *Второй закон Ньютона в импульсной форме - равнодействующая к телу сила равна производной импульса тела:*

$$\overrightarrow{F} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \tag{6.5}$$

6.2 Импульс тела (системы материальных точек)

До этого мы говорили только импульс материальной точки, а теперь рассмотрим импульс тела (или системы материальных точек)

Определение 6.3 *Импульс тела - суммарный импульс всех материальных точек их которых состоит это тело*

$$\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{p}_i \tag{6.6}$$

Данное определение с одной стороны очень простое, но не всегда удобное для использования, так как при описание движения тела мы привыкли оперировать понятием центра масс. Из-за за этого возникает следующая теорема.

Теорема 6.1 *Импульс тела равен массе тела умножить на скорость центра масс.*

Прежде чем доказывать данную теорему, давайте вспомним чему равна скорость центра масс. Запишем определение центра масс:

$$\overrightarrow{r}_{\text{ц.м.}} = \frac{\sum_i \overrightarrow{r}_i m_i}{\sum_i m_i} \tag{6.7}$$

продифференцируем и тогда получим:

$$\overrightarrow{v}_{\text{ц.м.}} = \frac{\sum_i \overrightarrow{v}_i m_i}{\sum_i m_i} \tag{6.8}$$

Теперь распишем определение импульса тела (системы точек):

$$\overrightarrow{p} = \sum_i \overrightarrow{p}_i = \sum_i \overrightarrow{v}_i m_i = \sum_i m_i \frac{\sum_i \overrightarrow{v}_i m_i}{\sum_i m_i} = m_{\text{тела}} \cdot \overrightarrow{v}_{\text{ц.м.}} \tag{6.9}$$

Таким образом, импульс тела теперь можно считать очень просто - достаточно найти скорость центра масс.Кстати, от сюда следует очевидный вывод: импульс системы относительно центра масс равен нулю.
Тогда мы можем записать второй закон Ньютона в импульсной форме для тела. Рассмотрим систему материальных точек. Для каждой точки мы можем записать второй закон Ньютона в импульсной форме:

$$\frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \overrightarrow{F_i} + \sum_j \overrightarrow{F_{ij}} \tag{6.10}$$

где $\overrightarrow{F_i}$ сумма внешних(по отношению к системе точек) сил, действующих на i-ую точку, а $\overrightarrow{F_{ij}}$ - сила с которой j-ая точка действует на i-ую. Тогда просуммировав по всем точкам получим:

$$\sum_i \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{F_i} + \sum_i \sum_j \overrightarrow{F_{ij}} \tag{6.11}$$

Слагаемое $\sum_i \sum_j \overrightarrow{F_{ij}}$ равно нулю, так как по третьему закону Ньютона $\overrightarrow{F_{ij}} = -\overrightarrow{F_{ji}}$ Таким образом мы получаем второй закон Ньютона в импульсной форме для системы материальных точек (тела).

Теорема 6.2 *Производная импульса тела (системы материальных точек) равна сумме всех внешних сил, действующих на тел:*

$$\sum_i \frac{d\overrightarrow{p_i}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{F_i} \tag{6.12}$$

6.3 Законы сохранения и изменения импульса

Из второго закона Ньютона в импульсной форме следует множество простых но важных законов сохранения. Приведем их все без доказательства, так как оно очевидно. Для экономии бумаги мы будем сразу формулировать все законы для системы тел, но они, конечно, применимы и для одной материальной точки. Хочется так же отметить, что система точек, система тел или просто тело являются для нас эквивалентными понятиями, так как все это просто множество материальных точек.

Теорема 6.3 *Закон изменения импульса для системы тел:*

$$d\overrightarrow{p} = \sum \overrightarrow{F}_{внеш i} dt \tag{6.13}$$

Теорема 6.4 *Закон сохранения импульса для системы тел. Если сумма внешних сил, действующих на систему равна нулю, то импульс системы не меняется:*

$$\sum \overrightarrow{F}_{внеш i} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{p} = const \tag{6.14}$$

Теорема 6.5 *Закон изменения проекции импульса для системы тел:*

$$dp_x = \sum F_{x\, внеш\, i} dt \tag{6.15}$$

Теорема 6.6 *Закон сохранения проекции импульса для системы тел. Если сумма проекций внешних сил на какую-то ось, действующих на систему равна нулю, то проекция импульс системы на эту ось не меняется не меняется:*

$$\sum F_{x\, внеш\, i} = 0 \Rightarrow p_x = const \tag{6.16}$$

Необходимо обратить внимание, на следствие закона изменения импульса для системы тел: скорость центра масс системы тел может изменить только если на систему будут действовать внешние силы. Это кажется очевидным, однако нам хотелось все равно обратить на это внимание.

6.4 Реактивное движение

Как видно из закона сохранения импульса, если часть тела полетит в одну сторону, то оставшаяся ускорится. Эта идея лежит в основе реактивного движения.

Определение 6.4 *Реактивное движение - движение, происходящее за счет отделения части тела с определенной скоростью.*

Для начала рассмотрим простой случай реактивного движения.

Пример 6.1 *Пусть ракета массой M в первоначальный момент покоилась. Потом ракета выбрасывает (будем считать, что мгновенно) относительно себя влево порцию топлива массой m со скоростью u. Найдем скорость ракеты после.*

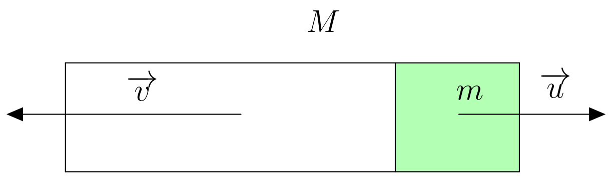


Рис. 6.1: Ракета, летающая за счет реактивной силы

Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета, связанной с ракетой (то есть покоящейся):

$$0 = (M - m)v - um \tag{6.17}$$

Из выражения (6.17) получаем значение скорости после отделения топлива массой m:

$$v = u\frac{m}{M - m} \tag{6.18}$$

6.4.1 Уравнение Мещерского

Теперь рассмотрим непрерывный случай.

Пусть наша ракета в данный момент времени t летит со скоростью $\vec{v}(t)$ относительно нас и имеет массу $M(t)$ и обозначим за μ расход топлива в единицу времени. Скорость топлива относительно ракеты равна u.

$$[\mu] = [\frac{\text{кг}}{c}]$$

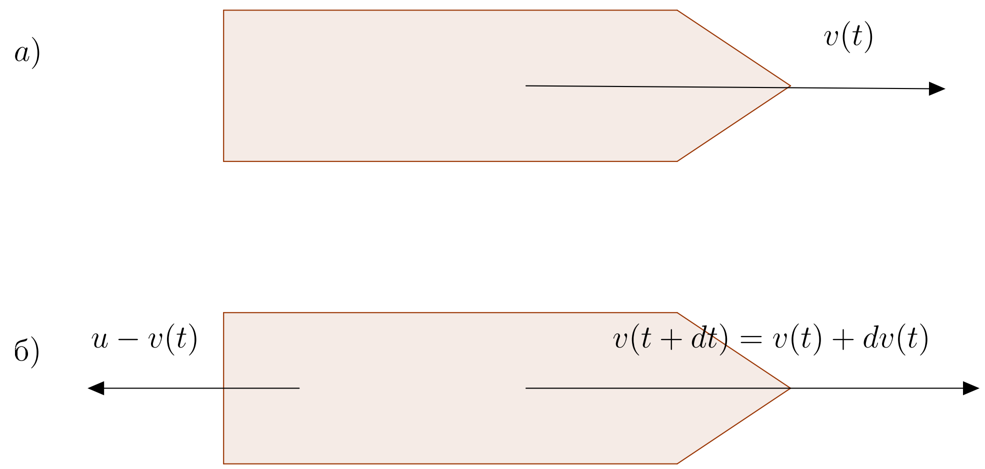


Рис. 6.2: Летящая ракета

Через малый промежуток времени, равный dt, ее масса изменилась:

$$M(t+dt) = M(t) - \mu dt$$

За это время скорость ракеты изменилась на dv, тогда скорость стала равной

$$v(t+dt) = v(t) + dv$$

Запишем закон сохранения проекции импульса для ракеты относительно нас (не забудем, что u - скорость топлива относительно ракеты, а не относительно нас):

$$M(t)v(t) = (M(t) - \mu dt)(v(t) + dv) - \mu dt(u - v(t))$$

$$M(t)v(t) = M(t)v(t) + M(t)dv - \mu v(t)dt - \mu dvdt + \mu v(t)dt - \mu udt$$

$\mu dtdv$ пренебрежимо мало, поэтому

$$M(t)dv = \mu dtu$$

Разделив обе части равенства на dt, получаем уравнение Мещерского:

$$M(t)\frac{dv}{dt} = \mu u \tag{6.19}$$

Величину μu иногда называют **реактивной силой**, и она постоянна, однако ускорение ракеты не будет постоянным из-за переменной массы.

Можно еще написать закон изменения массы: $M(t) = M_0 - \mu t$, тогда для реактивной силы получим:

$$= \mu u = (M_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} \tag{6.20}$$

Хочется отметить, что такой же результат мы могли бы получить записав закон сохранения проекции импульса на относительно СО, двигающейся со скоростью $v(t)$, то есть совпадающей с ракетой в начале рассматриваемого момента:

$$0 = (M(t) - \mu dt)dv - \mu dtu \tag{6.21}$$

6.4.2 Формула Циолковского

Определение 6.5 *Формула Циолковского определяет скорость, которую развивает летательный аппарат под воздействием тяги ракетного двигателя, неизменной по направлению, при отсутствии всех других сил.*

Запишем уравнение Мещерского немного в другом виде:

$$dv = \frac{\mu u dt}{M_0 - \mu t}$$

Проинтегрируем (то есть сложим все изменения скорости за малые промежутки времени) от начального времени до произвольного момента времени t:

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_0^t \frac{\mu u dt}{M_0 - \mu t} = -u\int_0^t \frac{d(M_0 - \mu t)}{M_0 - \mu t} = -u\ln\frac{M_0 - \mu t}{M_0}$$

Тогда

$$v(t) - v_0 = u\ln\frac{M_0}{M_0 - \mu t}$$

Перенесем v_0 направо и получим формулу Циолковского:

$$v(t) = v_0 + u\ln\frac{M_0}{M_0 - \mu t} \tag{6.22}$$

Отметим, что здесь мы пренебрегли взаимодействием с Землей, в реальных же расчетах полета ракет обязательно нужно учесть притяжение к Земле, однако такие задачи обычно решают численно (используя компьютеры), так как аналитическое решение не всегда возможно получить.

Глава 7

Энергия

- После стольких лет?
- Всегда!

“Гарри Поттер и Дары Смерти”
Дж. К. Роулинг

В обычной жизни вы очень часто встречали такие понятия, как энергия или работа. Однако, до сих пор мы не сталкивались с ними. Почему? Как мы говорили прежде (Глава 6) для решения всех задач механики у нас уже есть законы Ньютона и закон вращательного движения. Но, можно сильно упростить жизнь и для этого мы и введем такие естественные понятия, как работа и энергия.

7.1 Работа силы

Определение 7.1 *Работой постоянной силы называется скалярное произведение силы на перемещение*

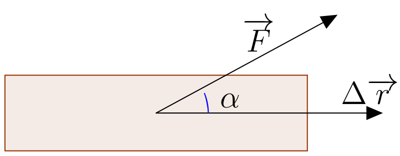


Рис. 7.1: Работа силы

$$A = \overrightarrow{F}\Delta\overrightarrow{r} = |\Delta r| \cdot |F| \cos\alpha \tag{7.1}$$

Другими словами, можно сказать, что работа постоянной силы это сила умноженная на перемещение вдоль прямой действия этой силы. Отдельно хочется отметить, что если сила перпендикулярна перемещению, то работа будет равна нулю. Так как перемещение тела зависит от выбора СО, то отметим, что работа зависит от выбора СО.

7.1.1 Работа переменной силы

Если сила, действующая на тело, перемена, то мы можем рассмотреть работу при малом перемещении:

Определение 7.2 *Элементарная работой называется скалярное произведение силы на малое перемещение перемещение. Под малым перемещением подразумевается перемещение, при котором изменением силы можно пренебречь.*

$$dA = \overrightarrow{F} d\overrightarrow{r} \tag{7.2}$$

Рассмотрим теперь прямолинейное движение вдоль оси X под действием переменной силы $F(x)$. Здесь сила может действовать не только вдоль оси X, но под силой $F(x)$ мы подразумеваем ее проекцию на ось X Тогда элементарная работа:

$$dA(x) = F(x)dx \tag{7.3}$$

Суммирую (интегрирую) по оси X от начального положения x_1 до конечного x_2:

$$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} F dx \tag{7.4}$$

Таким образом, работа переменной силы будет равна площади под графиком $F(x)$, согласитесь, очень похоже на перемещение тела, двигающегося с переменной скоростью.

7.1.2 Мощность

Кто круче черепаха или слон? Странный вопрос. Очевидно, что сила слона много больше силы черепахи, однако черепахи живут сильно дольше и успеют совершить огромную работу. Что бы не было такой неоднозначности, мы введем понятием новую физическую величину - мощность.

Определение 7.3 *Средняя мощность - работа, совершенная за единицу времени.*

$$P_{\text{ср}} = \frac{A}{\Delta t} \tag{7.5}$$

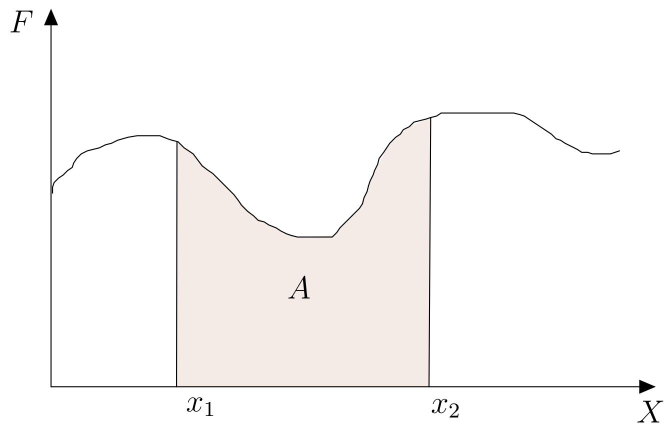


Рис. 7.2: Работа переменной силы

Определение 7.4 *Мгновенная мощность - отношение работы совершенной за бесконечно малый промежуток времени к этому промежутку времени. Или производная работы по времени*

$$P(t) = \frac{dA}{dt} \tag{7.6}$$

Из определения мгновенной мощности можно получить:

$$P(t) = \frac{dA}{dt} = \frac{F(t)dx}{dt} = F(t)v(t) \tag{7.7}$$

Заметим, что такой же результат можно получить не только для прямолинейного движения:

$$P(t) = \frac{dA}{dt} = \frac{\overrightarrow{F}(t)\overrightarrow{dr}}{dt} = \overrightarrow{F}(t)\overrightarrow{v}(t) \tag{7.8}$$

Отметим, что мгновенная и средняя мощность очень похожи на мгновенную и среднюю скорость. В каком-то смысле мощность это и есть скорость - скорость совершения работы.

7.2 Кинетическая энергия

Определение 7.5 *Кинетической энергии материальной точки массой m, двигающейся с скоростью v - физическая величина равная $\frac{mv^2}{2}$.*

Такое определение может показаться странным, однако оно раскроется в следующей теореме.

Теорема 7.1 ***Теорема о кинетической энергии тела:*** *изменение кинетической энергии материальной равно работе всех сил, действующих на материальную точку.*

$$\Delta E_{кин} = A \tag{7.9}$$

Рассмотрим простейший случай - материальная точка будет ускоряться вдоль оси X под действием постоянной силы F Найдем работу, которую нужно совершить над материальной точкой, чтобы разогнать его от скорости v_1 до v_2.

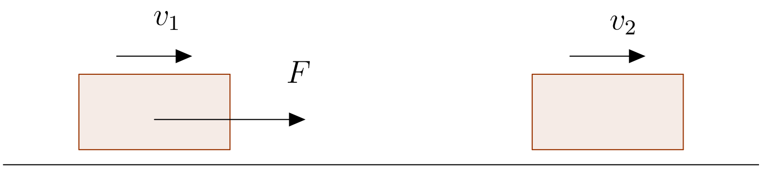


Рис. 7.3: Разгон тела от v_1 до v_2

Запишем формулу пути без времени (2.29):

$$\Delta x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}$$

Тогда работа равна:

$$A_{\text{внеш}} = F\Delta x = \frac{F}{a}\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta E_{\text{кин}} \quad \text{ч.т.д.} \tag{7.10}$$

Таким образом, можно сказать, что кинетическая энергия это есть работа, которую нужно совершить, что бы разогнать материальную точку от нуля до скорости v.

Упражнение 7.1 *Докажите теорему 7.1 для работы переменной силы.*

До этого момента мы считали кинетическую энергию только материальных точек. Нужно ввести понятие кинетической энергии системы (тела).

Определение 7.6 *Кинетическая энергия системы это сумма кинетических энергий материальных точек из которых состоит эта система.*

Теперь мы сможем сформулировать теорему о кинетической энергии для системы тел.

Теорема 7.2 ***О кинетической энергии системы:*** *изменение кинетической энергии тела равно работе всех сил, действующих на все точки из которых состоит система.*

$$\Delta E_{кин} = \sum A \tag{7.11}$$

Для доказательства этой теоремы необходимо всего лишь записать теорему 7.1 для каждой материальной точки из которых состоит система.

7.2.1 Теорема Кёнига

Каждый раз когда мы сталкиваемся с системой материальных точек (тел), мы пытаемся выразить разнообразные физические величины через параметры центра масс. Так было, например, с импульсом системы точек (6.1), так будет и сейчас. Пусть у нас есть точки с массой m_i, двигающиеся со скоростью $\overrightarrow{v}_i$. Пусть центр масс системы движется со скоростью $\overrightarrow{v}_c$, скорость точки относительно центра масс (Ц-система) $\overrightarrow{v}'_i$, тогда:

$$\overrightarrow{v}_i = \overrightarrow{v}_c + \overrightarrow{v}'_i \tag{7.12}$$

Найдем связь кинетической энергии в ЛСО и Ц-системе.

$$\begin{aligned} E_{\text{кин}} &= \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i(\overrightarrow{v}_c + \overrightarrow{v}'_i)^2}{2} = \\ &= \sum \frac{m_i v_c^2}{2} + \sum \frac{m_i v_i^2}{2} + \overrightarrow{v}_c \sum m_i \overrightarrow{v}'_i \end{aligned} \tag{7.13}$$

Последняя сумма равна нулю из определения центра масс (возьмите производную от выражения (5.2)): Тогда получаем:

$$E_{\text{кин}} = \frac{m_{\text{системы}} v_c^2}{2} + K' \tag{7.14}$$

где, K' - кинетическая энергия частиц относительно центра масс.

Теорема 7.3 *Теорема Кенига - кинетическая энергия механической системы есть энергия движения центра масс плюс энергия движения относительно центра масс.*

7.2.2 Энергия вращательного движения

Рассмотрим теперь кинетическую энергию вращательного движения твердого тела относительно произвольной оси (зачастую эта ось будет проходить через центр масс). Пусть у нас есть точки с массой m_i, находящиеся на расстоянии r_i от оси и двигающиеся со скоростью $\overrightarrow{v}_i$.
Распишем их кинетическую энергию через угловую скорость (которая общая для всех точек):

$$E_{\text{кин}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i (\omega r_i)^2}{2} = \sum \frac{m_i r_i^2}{2} \omega^2 \tag{7.15}$$

Вспоминая определение момента инерции (5.11), получаем очень красивое выражение для кинетической энергии:

$$E_{\text{кин}} = \frac{J\omega^2}{2} \tag{7.16}$$

Заметим, что аналогом массы здесь выступает момент инерции, а аналогом скорость угловая скорость.

7.3 Потенциальная энергия

Определение 7.7 *Потенциальная (консервативная) сила - сила, работа которой по по перемещению из любой точки в любую другую не зависит от формы траектории, а зависит только от расположения точек.*

Определение 7.8 *Потенциальная (консервативная) сила - сила, работа которой по любому замкнутому контуру равна нулю.*

Упражнение 7.2 *Докажите эквивалентность двух определений.*

Определение 7.9 *Потенциальная энергия - функция, разность значений которой в двух точках дает работу потенциальной силы при переносе из первой точки во вторую:*

$$A_{1\to 2} = -(W_2 - W_1) = -\Delta W \tag{7.17}$$

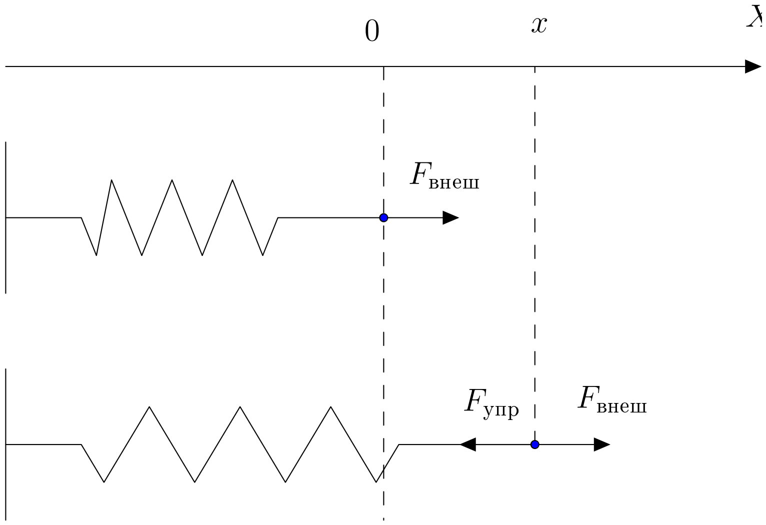


Рис. 7.4: Пружинки

7.3.1 Потенциальная энергия упругой деформации

Упражнение 7.3 *Доказать, что сила упругости - консервативная сила.*

Как известно, сила упругости равна

$$F(x) = -kx.$$

Найдем работу силы упругости при растяжении от x_1 до x_2. Сила у нас переменная, поэтому нам нужно будет считать или интеграл или площадь под графиком $F(x)$: Запишем по определению работу :

$$A_{x_1 \to x_2} = \int\limits_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\int\limits_{x_1}^{x_2} kxdx = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right) \quad (7.18)$$

Отсюда следует, что энергия пружинки равна:

$$W_{\text{пруж}} = \frac{kx^2}{2} \quad (7.19)$$

где, x - растяжение пружины.

Настоятельно рекомендуем использовать координатную запись удлинения пружинки для сложных задач, а не Δx Заметим, что мы тут не написали константу, так как разумно считать энергию нерастянутой пружинки равной нулю.

Важно отметить, что здесь работу можно считать, как просто площадь под графиком (площадь трапеции), но не забыть про минус. Но для чего-то ведь мы учились интегрировать!

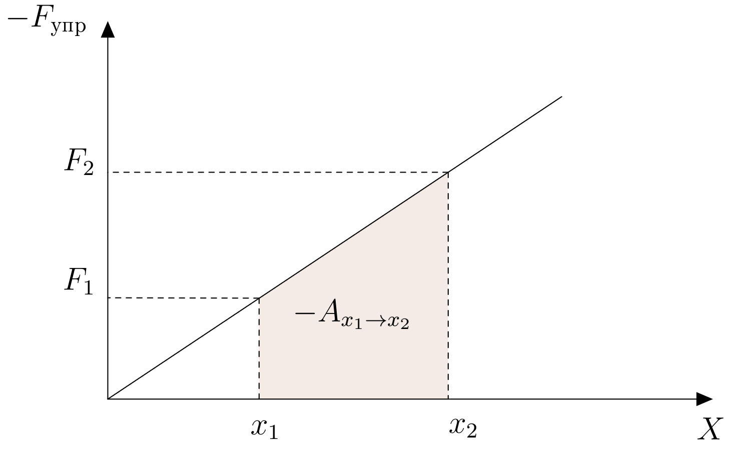


Рис. 7.5: График зависимости силы упругости от растяжения

7.3.2 Потенциальная энергия гравитационного поля

Как вы заметили, мы последовательно исследуем на потенциальность известные нам силы. Вот дошла очередь и до гравитационной силы.

Упражнение 7.4 *Доказать, что сила гравитации является потенциальной.*

Пусть у нас есть тело массой M, посмотрим какую работу совершит сила всемирного тяготения при перемещении пробной массы m. Заметим, при перемещении пробной массы работа будет совершаться только при движении вдоль радиуса, при движении по дугам окружностей работа будет равна нулю. Поэтому, положение тела будем описывать одной координатой r - расстояние до тела (центра масс) M.

Направим ось r из центра тела M. Тогда гравитационная сила будет равна:

$$F(r) = -G\frac{mM}{r^2}.$$

Найдем работу гравитационной силы при перемещение тела из точки на расстоянии r_1 в точку на расстоянии r_2:

$$A_{r_1 \to r_2} = \int\limits_{r_1}^{r_2} F(r)dr = \int\limits_{r_1}^{r_2} -G\frac{mM}{r^2}dr =$$

$$= -GMm\int\limits_{r_1}^{r_2} r^{-2}dr = -GMm\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right) \tag{7.20}$$

Таким образом потенциальна энергия гравитационного взаимодействия по определению будет равна:

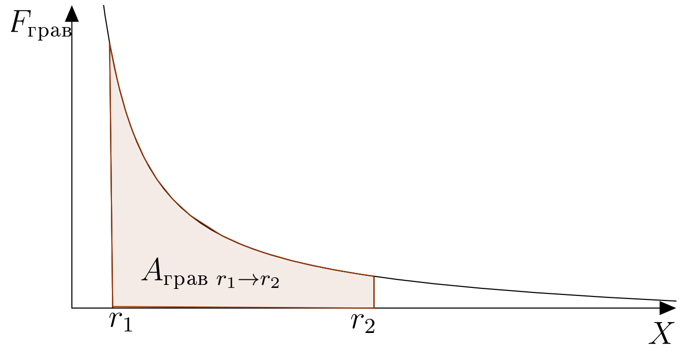


Рис. 7.6: График зависимости гравитационной силы от расстояния

$$W\text{грав} = -G\frac{mM}{r} + const \tag{7.21}$$

Хочется отметить несколько важных моментов:

1. Константу обычно берут равной нулю, из-за того, что это кажется разумным в связи с отсутствием взаимодействия на бесконечности.

2. Это энергия взаимодействия двух тел, она не принадлежит какому-то одному телу.

3. Если мы взяли константу $= 0$, то потенциальная энергия двух притягивающихся тел отрицательная. Она растет с удалением их друг от друга и стремится к нулю.

7.3.3 Потенциальная энергия поля тяжести Земли

Частным случаем потенциальной энергии гравитационного взаимодействия является потенциальная энергия поля тяжести Земли. Вблизи поверхности Земли мы можем считать силу тяжести постоянной $F_{\text{тяж}} = -mg$, где ось мы направили вверх.
Тогда работа сила силы тяжести при переносе тела с высота с h_1 до высотыh_2 будет равна:

$$A_{h_1 \to h_2} = F_{\text{тяж}}(h_2 - h_1) = -(mgh_2 - mgh_1) \tag{7.22}$$

По определению получаем потенциальную энергию взаимодействия тела массы m с Землей:

$$W = mgh + const \tag{7.23}$$

Смысл этой константы заключается в произвольности выбора “нуля” высоты. Действительно, нас обычно не интересует высота на которой находится тело, а интересует только перепад высот.

У внимательного читателя может возникнуть вопрос: “А почему при бесконечном удалении от Земли потенциальная энергия в такой записи не стремится к нулю?”. Тут важно, что мы считали, что тело находится вблизи поверхности Земли и сила тяжести постоянна, а при удалении на бесконечность, безусловно, сила будет убывать, а вместе с ней и потенциальная энергия.

7.4 Теорема о механической энергии

Теперь, когда мы познакомились с потенциальными силами и потенциальной энергией, давайте вспомним теорему о кинетической энергии (Теорема 7.2)

$$\Delta E_K = A_{\text{всех сил}}$$

Распишем работу всех сил, как работу потенциальных и непотенциальных сил и вспомнил определение потенциальной энергии (Определение 7.9)

$$\Delta E_K = A_{\text{пот}} + A_{\text{непот}}$$

$$\Delta E_K = -\Delta E_{\text{пот}} + A_{\text{непот}}$$

$$\Delta E_K + \Delta E_{\text{пот}} = A_{\text{непот}}$$

Определение 7.10 *Механическая энергия системы это сумма кинетической и потенциальных энергий.*

Получаем теорему об изменении механической энергии:

Теорема 7.4 *Изменение механической энергии системы есть работа непотенциальных сил.*

$$\Delta E_{\textit{мех}} = A_{\textit{непот}} \tag{7.24}$$

Из этой теоремы следует закон сохранения механической энергии:

Теорема 7.5 *Механическая энергия системы сохраняется если работа непотенциальных сил равна нулю.*

7.5 Удары

Законы сохранения импульса и энергии находят живое применение в задачах про удары двух или нескольких тел. Важно отметить, что из-за удара не может меняться импульс системы, так как силы, возникающие во время удара, будут внутренними.

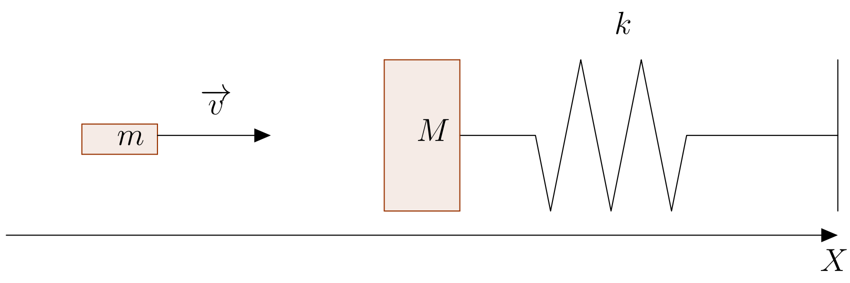


Рис. 7.7: Абсолютно неупругий удар

7.5.1 Абсолютно неупругий удар

Определение 7.11 *Абсолютно неупругий удар – модель удара, при котором верен только закон сохранения импульса. После соударения два тела движутся как одно целое (с одинаковой скоростью).*

Примером абсолютно неупругого удара является удар двух пластилиновых шариков или застревание пули в мишени.

Пример 7.1 *Стреляем пулей массой m в мишень массой M на пружинке с коэффициентом жесткости, равным k. Чему будет равно максимальное сжатие пружинки?*

Так как пуля застревает, то удар будет абсолютно неупругим. Запишем ЗСИ, где $\vec{u}$ - скорость мишени с пулей после удара:

$$mv = (m+M)u$$

Дальнейший процесс сжатия пружинки будет происходить без выделения тепла, поэтому можем записать ЗСЭ:

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{k\Delta x^2}{2}$$

Отметим, что мы тут воспользовались тем, что при максимальном сжатие пружинка не сжимается еще, то есть скорость мишени с пулей равна нулю.
Итого можем формально записать систему из двух уравнений с двумя неизвестными и не решать ее (благо решается она простой подстановкой u из первого уравнения во второе):

$$\begin{cases} mv = (m+M)u \\ \frac{(m+M)u^2}{2} = \frac{k\Delta x^2}{2} \end{cases} \tag{7.25}$$

7.5.2 Абсолютно упругий удар

Определение 7.12 *Абсолютно упругий удар – модель удара, при котором сохраняется механическая энергия и импульс*

Примером абсолютно упругого удара является удар бильярдных шариков. При ударах шариков выделяют особый тип ударов - центральный удар:

Определение 7.13 *Центральный удар - удар при котором скорости шариков направлены вдоль прямой, соединяющей их центры.*

Пример 7.2 *Ударяются два тела с массами m_1 и m_2, летящие со скоростью v_1 и v_2 соответственно. Найти их скорости после удара, если удар центральный.*

Задачи на центральный удар абсолютно неинтересны с физической точки зрения и требуют просто аккуратного решения системы уравнений из ЗСИ и ЗСЭ. Куда больший интерес представляет нецентральный удар. Давайте начнем изучение нецентрального удара со следующего примера.

Пример 7.3 *Докажите, что угол разлета двух одинаковых бильярдных шаров будет равен $\frac{\pi}{2}$. Один шар первоначально покоился.*

Пусть скорость первого шарика до удара $\overrightarrow{v}_1$, а после ударов у шариков скорости $\overrightarrow{v}'_1$ и $\overrightarrow{v}'_2$. Масса каждого m. Запишем ЗСЭ и ЗСИ:

$$\begin{cases} \frac{mv_1^2}{2} = \frac{m{v'_1}^2}{2} + \frac{m{v'_2}^2}{2} \\ m\overrightarrow{v}_1 = m\overrightarrow{v}'_1 + m\overrightarrow{v}'_2 \end{cases} \tag{7.26}$$

Сокращая на массу получаем:

$$\begin{cases} v_1^2 = {v'_1}^2 + {v'_2}^2 \\ \overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{v}'_1 + \overrightarrow{v}'_2 \end{cases} \tag{7.27}$$

Возведем второе уравнение во квадрат:

$$\begin{cases} v_1^2 = {v'_1}^2 + {v'_2}^2 \\ v_1^2 = {v'_1}^2 + {v'_2}^2 + 2\overrightarrow{v}'_1\overrightarrow{v}'_2 \end{cases} \tag{7.28}$$

От сюда следует, что $\overrightarrow{v}'_1\overrightarrow{v}'_2 = 0$, это означает, что или скорость одного из шариков ноль (естественно, остановиться может только биток) или угол разлета между ними будет $\frac{\pi}{2}$. Отметим, что зачастую запись ЗСИ в векторной форме упрощает решение задачи, особенно когда в задачи фигурируют углы, так как они очень хорошо находятся из скалярного произведения.

Но что же делать в случае нецентрального удара в общем случае?

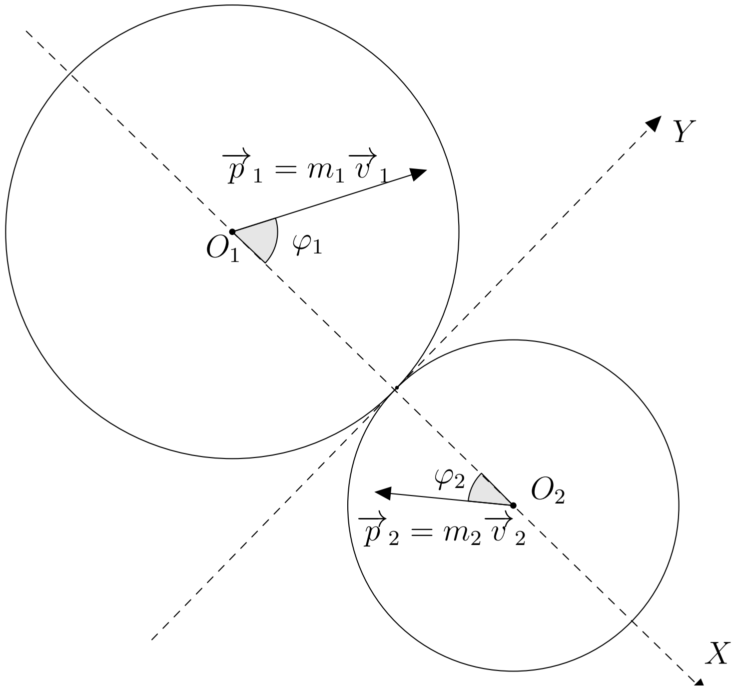


Рис. 7.8: Нецентральный удар

Пример 7.4 *Рассчитать абсолютно упругий нецентральный удар.*

Давайте поймем в чем у нас может быть сложность? Пусть мы знаем скорости до удара $\overrightarrow{v}_1$ и $\overrightarrow{v}_2$, а нужно найти скорости после удара $\overrightarrow{v}'_1$ и $\overrightarrow{v}'_2$. То есть в двумерном случае у нас будет четыре неизвестные.
А сколько уравнений мы сможем получить из ЗСЭ и ЗСИ. ЗСЭ - одно уравнение, а ЗСИ в проекции на две оси это еще два уравнения. Итого всего 3. Как-то мало. Но если задуматься, то задача становится куда более простой.

Все дело в том, что при ударе силы действую только вдоль прямой соединяющей центы шаров $\overrightarrow{O_1O_2}$ (Назовем эту ось осью X). А значит, что импульс меняется только вдоль этой оси, и не меняется вдоль оси Y перпендикулярной X. Тогда мы можем записать:

$$\begin{cases} \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1{v'_1}^2}{2} + \frac{m_2{v'_2}^2}{2} \\ m_1v_{1y} = m_1v'_{1y} \\ m_2v_{2y} = m_2v'_{2y} \\ m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_1v'_{1x} + m_2v'_{2x} \end{cases} \tag{7.29}$$

Теперь у нас есть четыре уравнения с четырьмя неизвестными (а по сути два с двумя). Читателю предлагаем самому ее решить, а так же записать эти уравнения через модуль скоростей и углы к осям.

В заключение хотелось бы отметить, что очень часто будет удобно записывать кинетическую энергию тела через его импульс и массу:

$$E_{\text{кин}} = \frac{p^2}{2m} \tag{7.30}$$

Действительно, тогда система (7.29) примет чуть более компактный вид

$$\begin{cases} \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{{p_1'}^2}{2m_1} + \frac{{p_2'}^2}{2m_2} \\ p_{1y} = p'_{1y} \\ p_{2y} = p'_{2y} \\ p_{1x} + p_{2x} = p'_{1x} + p'_{2x} \end{cases} \tag{7.31}$$

7.5.3 Удары в Ц-системе

Некоторые задачи на абсолютно упругие удары оказывается удобно решать в системе отсчета связанной с центром масс. Без ограничения общности будем считать, что в лабораторной системе отсчета (ЛСО) шарик с массой m_1 двигается со скоростью $\vec{v}_1$ и сталкивается с покоящимся шариком массы m_2. Найдем все скорости и импульс в системе отсчета, связанной с центром масс (Ц-система). Напомним, что по определению центр масс задается следующим радиус-вектором:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \tag{7.32}$$

Что бы получить скорость центра масс продифференцируем (7.32) и получим:

$$\vec{v}_C = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} \tag{7.33}$$

Тогда, в нашем случае имеем:

$$\vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{7.34}$$

Вычислим скорость первого и второго шарика до удара относительно центра масс:

$$\vec{v}_{1\text{отн}} = \vec{v}_1 - \vec{v}_C = \frac{m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{7.35}$$

$$\vec{v}_{2\text{отн}} = \vec{0} - \vec{v}_C = -\frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{7.36}$$

От сюда легко найти импульсы шариков в Ц-системе:

$$\vec{p}_{1\text{отн}} = \frac{m_1 m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{7.37}$$

$$\vec{p}_{2\text{отн}} = -\frac{m_1 m_2 \vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{7.38}$$

Можно заметить, что в Ц-системе суммарный импульс системы равен нулю. Тогда запишем закон сохранения импульса:

$$\vec{p}_{1\text{отн}} + \vec{p}_{2\text{отн}} = 0 = \vec{p}'_{1\text{отн}} + \vec{p}'_{2\text{отн}} \tag{7.39}$$

Таким образом:

$$\vec{p}_{1\text{отн}} = -\vec{p}_{2\text{отн}}, \ \ \vec{p}'_{1\text{отн}} = -\vec{p}'_{2\text{отн}} \tag{7.40}$$

Напишем закон сохранения энергии, учитывая, что $E_k = \frac{p^2}{2m}$:

$$\frac{p^2_{1\text{отн}}}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p'^2_{1\text{отн}}}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \tag{7.41}$$

Таким образом получаем, что импульс шариков в Ц-системе не меняется по модулю, а только поворачивается на какой-нибудь угол. Для расчета угла поворота нужно знать подробности о угле, например прицельный параметр или угол под которым налетает шарик.

Для анализа столкновения воспользуемся специальной графической техникой векторных диаграмм - методом векторных диаграмм. До столкновения скорость в ЛСО налетающей частицы $\vec{v}_1 = \vec{v}_C + \vec{v}_{1\text{отн}}$. Нарисуем скорость вектор скорости $\vec{v}_1$ и разобьем его на два вектора: $\vec{v}_C$ и $\vec{v}_{1\text{отн}}$. Скорости частиц в Ц-системе будем рисовать от конца вектора $\vec{v}_C$, это позволит нам быстро получать скорости относительно ЛСО.
После столкновения вектор скорости v'_{1OTH} может заканчиваться в любой точке окружности радиуса $v_{1\text{отн}} = v'_{1\text{отн}} = \frac{m_2 v_1}{m_1+m_2}$.Тогда, вектор скорости $\vec{v}'_1 = \vec{v}_C + \vec{v}'_{1\text{отн}}$ налетающей частицы в ЛСО после соударения может заканчиваться в любой точке этой окружности.
Из векторной диаграммы (Рис. 7.9) следует, что в случае $m_1 > m_2$ угол между векторами скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}'_1$ налетающей частицы не может превышать некоторого максимального значения θ , соответствующего случаю, когда $\vec{v}'_1$ касается указанной окружности:

$$\theta = \arcsin\frac{v_{1\text{отн}}}{v_C} = \frac{m_2}{m_1} \tag{7.42}$$

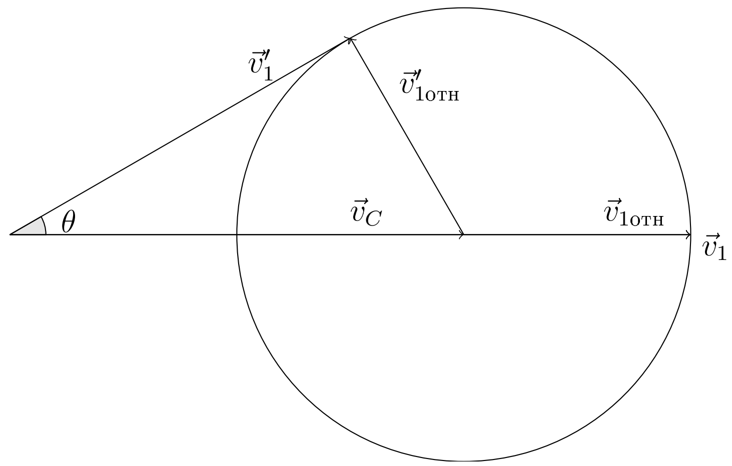


Рис. 7.9: Рассеяние тяжелой частицы

Определение 7.14 *Этот угол называется углом рассеяния.*

Он играет важнейшую роль в физике элементарных частиц, так как позволяет находить массы частиц.

Упражнение 7.5 *Нарисуйте векторную диаграмму для случая $m_1 < m_2$.*

Другим важным углом является угол разлета.

Определение 7.15 *Угол разлета - угол между скоростями двух частиц после удар.*

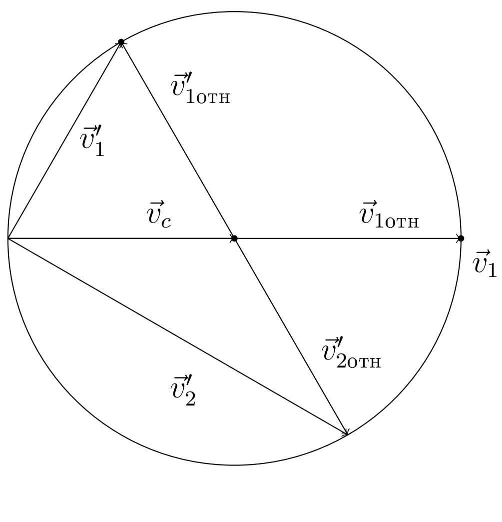


Рис. 7.10: Столкновение частиц одинаковой массы

Пример 7.5 *Два одинаковых гладких шара испытывают упругий нецентральный удар. Один из шаров до соударения покоился. Определите угол разлёта шаров.*

Из (7.34) следует, что в рассматриваемом случае $v_C = v'_{1\text{отн}} = \frac{v_1}{2}$ Тогда в диаграмме скоростей векторы $\vec{v}'_1$ и $\vec{v}'_2$, отложенные из одной точки, лежащей на окружности, образуют вписанный угол (Рис. 7.10), опирающийся на диаметр (так как из (7.40) $\vec{p}'_1 = -\vec{p}'_2$ и $m_1 = m_2$).
Угол, опирающийся на диаметр равен $\frac{\pi}{2}$. Так красиво можно получить широкоизвестный в узких кругах результат.

Глава 8

Момент импульса

Робость - это когда отворачиваешься от того, что хочешь. Стыд - когда отворачиваешься от того, чего не хочешь.

"Жутко громко и запредельно близко"
Джонатан Сафран Фоер

При описании движение твердого тела использовать импульс тела не всегда удобно. Например, при вращении с любой угловой скоростью кольца вокруг центра импульс его будет равен нулю. Ситуация тут очень похожа на ситуацию, когда сумма сил, действующих на тело, равна нулю, а сумма моментов сил не и поэтому тело начинало вращаться все быстрее и быстрее. Поэтому нам придется ввести новую физическую величину и познакомиться с законами, описывающими ее изменение.

8.1 Момент импульса материальной точки

Пусть материальная точка массы m двигается под действием силы F Запишем второй закон Ньютона в импульсной форме (6.5) для произвольной материальной точки и все происходит в системе координат с началом в точке O, а $\overrightarrow{r}$ - радиус-вектор нашей точки.

$$\frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{F} \tag{8.1}$$

Домножим равенство слева векторно на $\overrightarrow{r}$. получим:

$$\frac{d(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p})}{dt} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} \tag{8.2}$$

Справа мы получили момент силы относительно точки O, а выражение стоящее слева под дифференциалом мы будем называть моментом импульса относительно точки O.

Определение 8.1 *Моментом импульса материальной точки относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора из точки O на импульс материальной точки:*

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} \tag{8.3}$$

Отметим, что направление вектора момента импульса $\overrightarrow{L}$ в очередной раз по правилу буравчика показывает направление вращение точки.

Тогда мы можем записать закон изменения момента импульса для материальной точки.

Теорема 8.1 *Производная момента импульса материальной точки равна сумме момента сил, действующих на нее:*

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{M} \tag{8.4}$$

Хочется отметить, что данный закон практически полностью повторяет второй закон Ньютона в импульсной форме (6.5). Только вместо импульса момент импульса, а вместо силы - момент силы.

Упражнение 8.1 *Докажите, что:*

$$\frac{d(\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p})}{dt} = \overrightarrow{r} \times \frac{d\overrightarrow{p}}{dt}$$

8.2 Закон изменения момента импульса

Естественным образом в качестве момента импульса тела (системы точек) мы возьмем сумму моментов импульса всех материальных точек из которых состоит это тело (система точек). Возьмем произвольное тело (систему точек) и запишем для каждой точки закон изменения момента импульса относительно точки O:

$$\frac{d\overrightarrow{L}_i}{dt} = \overrightarrow{M}_i \tag{8.5}$$

Суммируя по всем точкам получим:

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{M}_{\text{внеш}} \tag{8.6}$$

Здесь $\overrightarrow{L}$ - полный (суммарный) момент импульса тела (системы точек), а $\overrightarrow{M}_{\text{внеш}}$ суммарный момент внешних сил приложенных к телу (системе точек). Важно отметить, что все момента внутренних сил уничтожаются, аналогично тому как они исчезали в законе изменения импульса для тела. Тогда мы можем сформулировать еще раз закон изменения момента импульса:

Теорема 8.2 *Производная момента импульса тела (системы точек) относительно любой точки равна сумме моментов внешних сил, действующих на тело относительно этой же точки (оси):*

$$\frac{d\overrightarrow{L}}{dt} = \overrightarrow{M}_{внеш} \tag{8.7}$$

От сюда естественным образом следует закон сохранения момента импульса:

Теорема 8.3 *Момент импульса тела (системы точек) относительно какой-то точки сохраняется, если сумма моментов сил действующих на него относительно этой точки равна нулю.*

8.2.1 Момент импульса относительно оси

Аналогично тому, как мы вводили момент сил относительно оси (5.7) мы введем момент импульса относительно произвольной оси X.

Определение 8.2 *Момент импульса относительно произвольной оси X это проекция вектора момента импульса относительно точки O, являющейся началом оси X, на ось X*

Использование момента импульса относительно оси может быть удобно в случае сложного вращения. В этом случае оказывается очень удобно спроецировать закон изменения момента импульса (теорема 8.2) на три взаимно перпендикулярные оси:

$$\begin{cases} \dfrac{dL_x}{dt} = M_x \\ \dfrac{dL_y}{dt} = M_y \\ \dfrac{dL_z}{dt} = M_z \end{cases} \tag{8.8}$$

Тогда мы можем сформулировать еще закон сохранения.

Теорема 8.4 *Момент импульса тела (системы точек) относительно произвольной оси сохраняется, если сумма моментов сил действующих на него относительно этой оси равна нулю.*

8.3 Вращение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси

В обычной жизни вы могли замечать, что изменяя момент инерции тело начинает вращаться быстрее (например балерины или фигуристы, совершающие обороты), при этом никакой внешний момент сил не возникает, а значит выполнен закон сохранения момента импульса. Поэтому возникает желание получить связь между моментом импульса, моментом инерции и угловой скоростью. Для простоты будем рассматривать вращение относительно неподвижной оси X. Этот случай является самым простым, но и самым практически важным. Так как каждая точка тела будет двигаться в плоскости перпендикулярной оси, ты мы будем записывать все законы в скалярной форме, а если быть точнее в проекции на ось X.
Разобьем тело на материальные точки массой m_i. Каждая такая материальная точка будет вращаться по окружности с центром в точке O_i, причем все эти центры лежат на оси X. Вектор, направленный из точки O_i в i-ую материальную точку назовем $\overrightarrow{r_i}$, тогда его длинна будет равна расстоянию от i-ой материальной точки до оси X.
Распишем момент импульса относительно оси X по определению. Заметим, что вектора $\overrightarrow{r_i}$ и $\overrightarrow{p_i}$ перпендикулярны друг другу и оси X, а значит для момента импульса относительно оси X имеем:

$$L_x = \sum r_i p_i = \sum m_i r_i v_i = \sum m_i r_i^2 \omega_x \tag{8.9}$$

Здесь r_i - расстояние от оси X до точек тела, а ω_x угловая скорость. Таким образом получаем простую и красивую связь между моментом импульса, моментом инерции и угловой скоростью относительно неподвижной оси:

$$L_x = J_x \omega_x \tag{8.10}$$

Кстати, из этой связи и закона изменения момента импульса (8.2) в одну строчку следует закон вращательного движения относительно оси X (5.10):

$$M_x = \frac{dL_x}{dt} = J\frac{d\omega_x}{dt} = J_x \beta_x \tag{8.11}$$

Это в очередной раз показывает нам, что все законы давно нам известны, и мы только получаем более удобную их форму. Например, систему уравнения описывающую плоское движение твердого тела (5.12) мы можем записать в новом виде через законы изменения импульса и момента импульса :

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \sum \overrightarrow{F} \\ \dfrac{dL_C}{dt} = \sum M_C \end{cases} \tag{8.12}$$

Здесь L_C и M_C - момент импульса и суммарный момент сил относительно оси проходящей через центр масс.

8.4 Сложное движение твердого тела

До этого момента мы в основном изучали плоское движение твердого тела, но как мы писали ранее (пункт 5.3.2) для описания общего случая нужно записать вращение относительно трех осей. Закон изменения момента импульса (теорема 8.2) вместе с законом изменения импульса (он же 2ЗН в импульсной форме (6.5)) позволит нам переписать систему (8.12) в векторном виде и получить законы, описывающее произвольное движение твердого тела:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \sum \overrightarrow{F} \\ \dfrac{d\overrightarrow{L}_C}{dt} = \sum \overrightarrow{M}_C \end{cases} \tag{8.13}$$

Здесь $\overrightarrow{L}_C$ и $\sum \overrightarrow{M}_C$ - момент импульса и суммарный момент сил относительно центра масс.

Напоследок отметим, что обычно мы записываем закон вращательного движения относительно центра масс, однако никто нам не запрещает записать вращение относительно произвольной оси, например относительно мгновенной оси вращения.

8.5 Второй закон Кеплера

Ранее (4.2.1) мы познакомились с законами Кеплера, но оставили их без доказательства. Благодаря закону сохранения момента импульса мы можем доказать второй закон Кеплера. Пусть планета массы m вращается вокруг Солнца значительно большей массы. Тогда мы можем считать, что солнце неподвижно, а в какой-то момент времени планета будет иметь скорость $\overrightarrow{v}$ и находится на расстоянии $\overrightarrow{r}$.

Найдем секторную скорость (то есть площадь “заметаемую” за единицу времени) $\frac{dS}{dt}$.

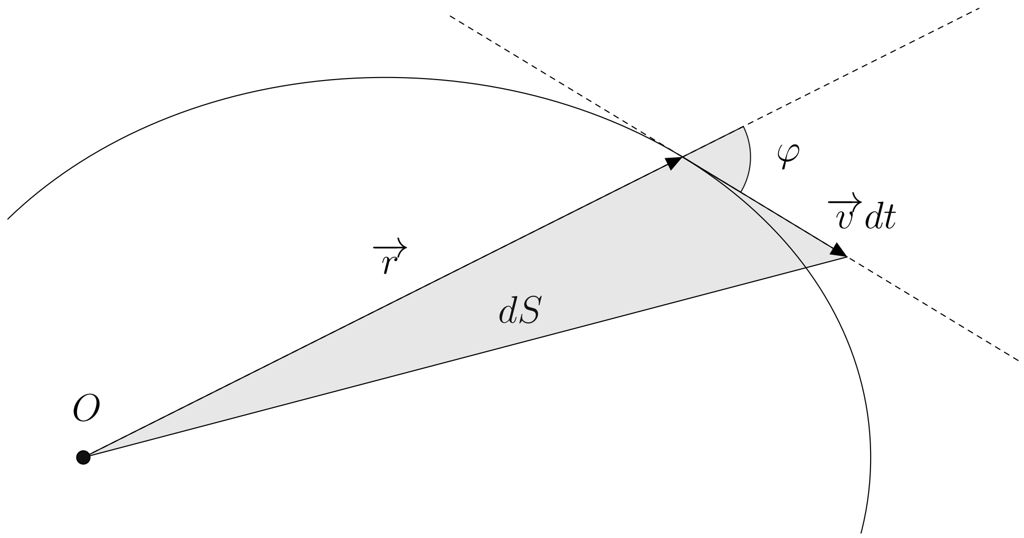


Рис. 8.1: Второй закон Кеплера

За малое время dt радиус вектор “заметёт” криволинейный треугольник площадью $dS = \frac{1}{2}rv\sin\varphi dt$. Тогда для секторная скорости имеем:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}rv\sin\varphi \tag{8.14}$$

Получается, что нам нужно доказать, что значение $rv\sin\varphi$ не меняется. Так как на систему не действуют внешний момент сил (так как внешних сил просто нет), то момент импульса планеты сохраняется (момент импульса Солнца мы считаем равным нулю)[1] :

$$\overrightarrow{L} = m\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v} = const \tag{8.15}$$

Вектор $\overrightarrow{L}$ перпендикулярен $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{r}$ (из определения векторного произведения), из этого следует, что траектория планеты лежит в одной плоскости (о чем и говорит первый закон Кеплера). Раз векторное произведение постоянно, то мы можем сказать, что постоянным будет и модуль векторного произведения:

$$rv\sin\varphi = const \tag{8.16}$$

Полученное выражение есть ни что иное, как удвоенная секторная скорость (8.14). Таким образом мы доказали, что:

$$\frac{dS}{dt} = const \tag{8.17}$$

На этом примере видно, как просто закон сохранения момента импульса позволяет решать задачи, связанные с вращением.

[1] более того, мы можем рассматривать просто планету, тогда на нее действует только сила притяжения, направленная к Солнцу, и поэтому момент этой силы относительно Солнца равен нулю, а значит, что момент импульса планеты относительно солнца сохраняется.

Глава 9

Механические колебания

Он поколебался, в какую читальню пойти, в Берклийскую или Оклендскую, и порешил в Оклендскую, ведь в Окленде живет Руфь.

"Мартин Иден", Джек Лондон

В предыдущих главах мы часто говорили про равновесие тела, но не задумывались над тем как достигается это равновесие. Вы могли замечать, что если встанете на весы, то стрелка не сразу "успокоится", а сначала будет скакать около положения равновесия. Такие "скачки", около положения равновесия часто встречаются в обычной жизни и их мы будем изучать в этой главе.

9.1 Виды колебаний

Определение 9.1 *Колебаниями называется процесс повторяющегося изменения системы около некой точки, называемой точкой равновесия.*

В данной главе мы будем в основном рассматривать механические колебания, то есть колебания происходящие с механической системой.
Колебания можно классифицировать по системе с окружающей средой:

1. Свободные - колебания под действием внутренних сил, возникающие после выведения системы из положения равновесия.
   Пример: грузик на веревки или на пружинке.

2. Вынужденные - колебания под действием периодической силы.
   Пример: придумайте сами.

3. Автоколебания - колебания под действием внешней непериодической силы, возникающей благодаря расходу запасенной потенциальной энергией.
   Пример: механические часы, энергия запасается в пружинке.

4. Параметрические - колебания возникающие из-за изменения системы
   Пример: человек самостоятельно качающийся на качелях.

5. Случайные - колебания происходящие под действием случайной силы.

Отдельно стоит сказать, что колебания бывают затухающими и незатухающими. В данной главе, к сожалению, мы ограничимся только свободными незатухающими колебаниями. Подробнее о других видах колебаний можно прочитать в [5], [6].

9.2 Примеры механических колебаний

Возьмем груз массой m и прикрепим его к горизонтальной пружине.

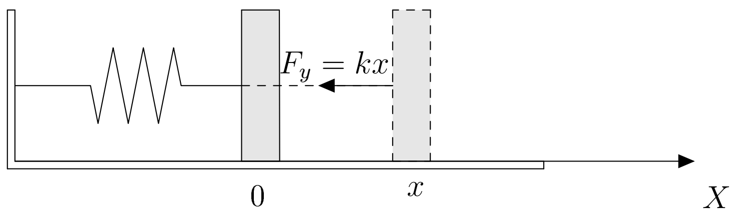


Рис. 9.1: Пружинный маятник

Отклонив его из положения равновесия мы сможешь наблюдать процесс колебаний. Попытаемся описать этот процесс. Как всегда, запишем второй закон Ньютона в проекции на ось X (Рис. 9.1):

$$ma = -kx \tag{9.1}$$

Вспоминая, что $a = x''$ получаем дифференциальное уравнение:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0 \tag{9.2}$$

Полученное таким простым образом уравнение, является ключевым при описании колебательного процесса и называется **уравнением гармонических колебаний**. И его исследованию мы посвятим несколько следующих пунктов.

Так же для полного описания колебаний, придется задавать начальные значения координаты и скорости:

$$x(0) = x_0 \tag{9.3}$$

$$x'(0) = v_0 \tag{9.4}$$

9.3 Гармонические колебания

Определение 9.2 *Уравнение гармонических колебаний:*

$$x(t)'' + \omega^2 x(t) = 0 \tag{9.5}$$

где ω постоянная величина.

Определение 9.3 *Гармоническими колебаниями называется процесс, описываемый уравнением (9.2).*

Прежде чем угадаем решение этого уравнения, выполним простое упражнение.

Упражнение 9.1 *Докажите, что если функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ являются решениями уравнения (9.2), то $x_3(t) = x_1(t) + x_2(t)$ тоже является решением .*

Как не сложно заметить, решением уравнения гармонических колебаний может быть $sin(\omega t)$, $cos(\omega t)$ а так же любая их линейная комбинация:

$$x(t) = C_1 sin(\omega t) + C_2 cos(\omega t) \tag{9.6}$$

где C_1 C_2 - константы, зависящие от начальных условий. В таком виде Решение (9.6) с помощью метода вспомогательного угла можно представить в виде:

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi_0) \tag{9.7}$$

или:

$$x(t) = Acos(\omega t + \varphi_0) \tag{9.8}$$

где, A, φ_0 и ω некие константы, смысл которых будет раскрыт в дальнейшем.

9.4 Решение уравнения гармонических колебаний

Важно отметить, что для анализа решения гармонических мы можем использовать (9.7) или (9.8) без ограничения общности, так как cos легко получить cos прибавлением $\frac{\pi}{2}$. Поэтому, давайте будем исследовать решением:

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi_0) \tag{9.9}$$

Сформулируем несколько определений.

Определение 9.4 *Максимальное значение $x(t)$ равное A называется амплитудой*

Определение 9.5 *Период функции $x(t)$ называется периодом колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega}$.*

Определение 9.6 *Частотой колебаний называется величина равная количеству колебаний за единицу времени $\nu = \frac{1}{T}$. Частота измеряется в Гц = c^{-1}.*

Определение 9.7 *ω называется циклической частотой, удобна для записи решения уравнения колебаний и численно равная количеству колебаний за 2π секунд.*

Определение 9.8 *Фазой колебаний называется аргумент синуса (или косинуса) $\Phi(t) = \omega t + \varphi_0$.*

Определение 9.9 *Начальной фазой называется значение фазы в начальный момент $\Phi(0) = \varphi_0$.*

Таким образом, мы видим, что частота (период) зависит только от уравнения колебаний, а амплитуда и начальная фаза от начальных условий (пример, начального отклонения грузика и начальной скорости). Нахождению амплитуды и начальной фазы по начальным условиям мы посвятим следующий пункт.

9.5 Связь между амплитудой, начальной фазой и начальными условиями

Пусть, у нас есть решение уравнения гармонических колебаний и заданы начальные условия:

$$\begin{cases} x(t) = Asin(\omega t + \varphi_0) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \tag{9.10}$$

Напомним, что $x'(t) = A\omega cos(\omega t + \varphi_0)$, тогда имеем:

$$\begin{cases} x(0) = Asin(\varphi_0) = x_0 \\ x'(0) = A\omega cos(\varphi_0) = v_0 \end{cases} \tag{9.11}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{cases} \operatorname{tg}(\varphi_0) = \frac{\omega x_0}{v_0} \\ A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} \end{cases} \tag{9.12}$$

Полученный результат позволяет нам говорить, что для нахождения закона движения, описывающего гармонический колебания, необходимо и достаточно знать уравнение гармонических колебаний и начальные условия. При этом частота колебаний зависит только от колебательной системы и не зависит от начальных условий.

9.6 Математический маятник

Определение 9.10 *Математическим маятником называется система, состоящая из материальной точки закрепленной на невесомой нерастяжимой нитке или невесомом стержне.*

Рассмотри колебания математического маятника и малых колебаний, то есть когда угол отклонения от вертикали α мал. Запишем второй закон ньютона в проекции на ось OX (рис. 9.2):

$$ma = -mgsin(\alpha) \tag{9.13}$$

Заметим, что мы записали второй закон Ньютона для произвольного положения грузика, тем самым мы пытаемся получить уравнение движение. Отдельно обратим внимание, что в уравнение (9.13) неизвестным является именно функция x(t). Так как $a(t) = x''(t) = \alpha''(t)l$, то из (9.13) получаем:

$$ml\alpha''(t) = -mgsin(\alpha(t)) \tag{9.14}$$

Напомним, что для малых углов $sin(\alpha) \approx \alpha$ (что бы изучать не малые колебания вы еще слишком маленькие) получим:

$$\alpha''(t) + \frac{g}{l}\alpha(t) = 0 \tag{9.15}$$

Таким образом, мы получили уравнений гармонических колебаний (9.2) и можем найти циклическую частоту и период колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{9.16}$$

Как ни странно, результат не зависит от массы тела. А что частота не зависит от начальных условий мы уже отмечали.

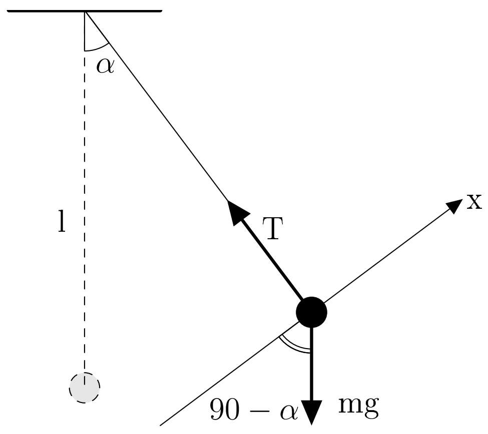


Рис. 9.2: Математический маятник

9.7 Физический маятник

Рассмотрим теперь более общий случай. Возьмем произвольное твердое тело, совершающее колебания относительно оси не проходящей через центр масс. Такая колебательная система называется **физическим маятником**. Как и прежде будем рассматривать плоское движение тела. Пусть тело массы m совершает колебания относительно оси O расстояние от центра масс до это оси равно l, а момент инерции относительно нее равен J. В положении равновесия равновесия центр масс тела располагался на вертикальном отвесе в точке C_0

Рассмотрим произвольный момент времени t, когда центр масс тела отклонился на угол $\alpha(t)$ и переместился в точку C. Запишем закон вращательного движения (5.10):

$$-J\alpha''(t) = mg \cdot l \sin\alpha(t)$$

Отметим, что знак минус возник, из-за того, что возникший момент силы тяжести стремиться вернуть тело в положение равновесия, другими словами угловое ускорение $\alpha''(t)$ противонаправлено отклонению $\alpha(t)$. Так как колебания малые, то $sin(\alpha) \approx \alpha$ и тогда мы получаем:

$$\alpha''(t) + \frac{mgl}{J}\alpha(t) = 0 \tag{9.17}$$

Таким образом, для частоты и периода малых колебаний физического маятника имеем:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}; \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \tag{9.18}$$

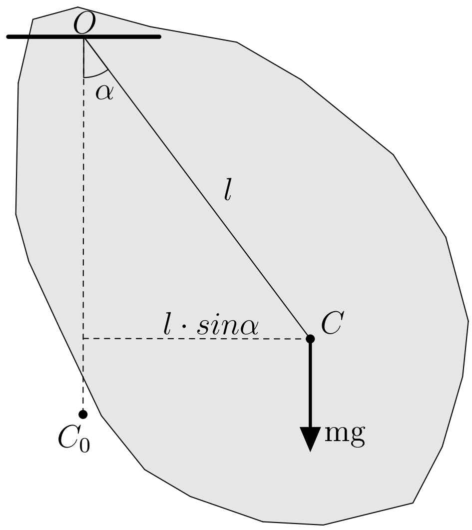


Рис. 9.3: Физический маятник

9.8 Пружинный маятник в поле тяжести Земли

Мы уже рассматривали колебания горизонтального пружинного маятника. Теперь немного усложним задачу - пусть маятник колеблется вертикально. Ключевое отличие заключается в положении равновесия грузика на пружинке. В случае вертикального маятника положение равновесия будет смещено вниз относительно положения в котором пружинка не растянута. Представляется разумным сразу найти растяжение пружинку в положении равновесия. Из второго закона Ньютона получаем:

$$mg - k\Delta x_0 = 0- > \Delta x_0 = \frac{mg}{k} \tag{9.19}$$

Обратим внимание, что Δx_0 это есть модуль первоначального сжатия, а не координата положения нерастянутости.

Тогда запишем второй закон Ньютона в проекции на ось OX (рис. 9.4) когда тело отклонилось от положения равновесия на $x(t)$ (то есть пружинка растянута на $x(t) + \Delta x_0$):

$$mg - k(x(t) + \Delta x_0) = mx''(t) \tag{9.20}$$

Подставим Δx_0 из (9.19) и случится чудо - mg и $k\Delta x_0$ сократятся и мы опять получим знакомое нам уравнение:

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{9.21}$$

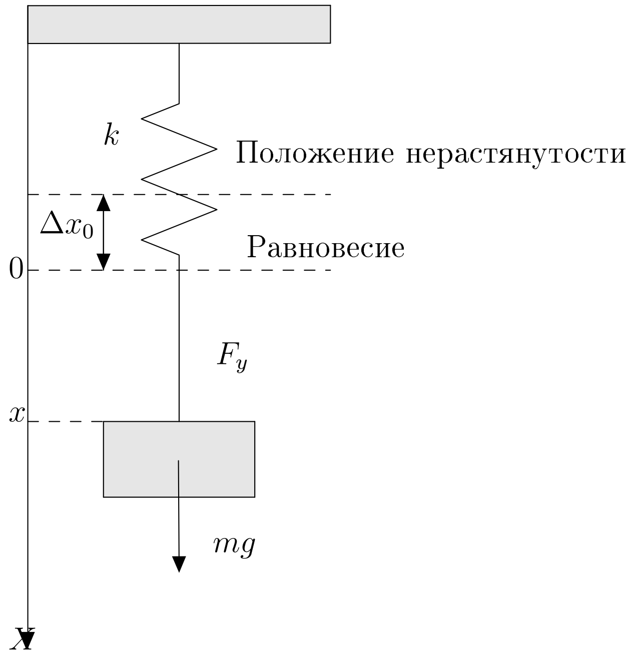


Рис. 9.4: Пружинный маятник в поле тяжести земли

Мы видим, что если колебания происходят в поле тяжести земли, то смещается только положение равновесия, а частота или период не меняется. Если мы были невнимательны, то могли забыть учесть первоначальное растяжение пружины Δx_0, тогда у нас бы получилось чуть-чуть неправильное уравнение:

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = g \tag{9.22}$$

Если внимательно приглядеться, то его решением будет :

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k} = Asin(\omega t + \varphi) + \Delta x_0 \tag{9.23}$$

А это и будут обычные гармонические колебания, смещенные относительно положения равновесия на Δx_0.Такое происходит, если мы не угадывает положение равновесия или просто действуем не аккуратно.

9.9 Энергетический подход для описания колебаний

Для того чтобы найти частоту ил период гармонических колебаний нам нужно получить уравнение вида (9.2). Во всех предыдущих случаях мы делали это, записывая второй закон Ньютона - это и разумно, ведь он является основным законом в динамике. Но есть принципиально другой подход, который иногда (на самом деле почти всегда) удобнее. Он базируется на том, что механическая энергия системы при колебаниях не меняется (напомним, что мы изучаем незатухающие колебания).

Пример 9.1 *Продемонстрируем этот метод на самом простом примере - горизонтальном пружинном маятнике (рис. 9.1)*

Запишем полную механическую энергию в произвольный момент времени (когда грузик отклонился на $x(t)$):

$$E_{mex} = \frac{k(x(t))^2}{2} + \frac{m(x'(t))^2}{2} \tag{9.24}$$

Здесь и далее в этой главе производная берется по времени. Раз механическая энергия не меняет, то $E'_{mex} = 0$:

$$E'_{mex} = kx(t)x'(t) + mx'(t)x''(t) = 0 \tag{9.25}$$

от сюда получаем легендарное уравнение для пружинного маятника

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \tag{9.26}$$

Упражнение 9.2 *Получить уравнение гармонических колебаний для пружинного вертикального маятника с помощью энергетического метода*

Пример 9.2 *Продемонстрируем энергетический метод для математического маятника (рис. 9.5)*

Запишем полную механическую энергию в произвольный момент времени (когда грузик отклонился на угол $\alpha(t)$), не забывая, что $v(t) = \omega(t)l = \alpha'(t)l$

$$\begin{aligned} E_{mex} &= mgl(1 - cos(\alpha(t))) + \frac{m(v(t))^2}{2} = \\ &= mgl(1 - cos(\alpha(t))) + \frac{ml^2(\alpha'(t))^2}{2} \end{aligned} \tag{9.27}$$

Здесь мы за нулевой уровень потенциальной энергии взяли положение равновесия. Раз механическая энергия не меняет, то $E'_{mex} = 0$:

$$E'_{mex} = mglsin(\alpha(t))\alpha'(t) + ml^2\alpha'(t)\alpha''(t) = 0 \tag{9.28}$$

от сюда получаем еще более легендарное уравнение для математического маятника:

$$\alpha''(t) + \frac{g}{l}\alpha(t) = 0 \tag{9.29}$$

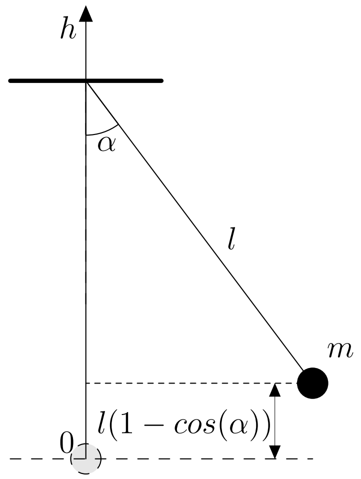


Рис. 9.5: Энергетический подход для математического маятника

В энергетическом методе скрыта одна очень важная физическая концепция: для получения закона движения консервативной системы можно найти полную механическую энергию в произвольный момент времени и приравнять ее производную нулю. Получившееся уравнение и будет законом движения.

Упражнение 9.3 *Продемонстрируем энергетический метод для физического маятника*

Упражнение 9.4 *Вывести закон движения тела в поле тяжести Земли через энергетический метод.*

Глава 10

Гидродинамика

Важное тонет в мелочах, катастрофы - в нелепостях.

"Вверх по лестнице, ведущей вниз"
Бел Кауфман

До этого момента мы изучали движения твердых тел, но важным разделом механики является механика сплошной среды.

Определение 10.1 *Механика сплошных сред — раздел механики, посвящённый движению газообразных, жидких и деформируемых твёрдых тел.*

Механика сплошной среды является одним из самых сложных разделов физики, поэтому мы будем только знакомится с ней на примере динамики жидкости. Одним из основных понятий в данной главе будет давление.

Определение 10.2 *Давление в точке- физическая величина, численно равная отношению нормальной составляющей силы на бесконечно малый элемент площади:*

$$p = \frac{dF_n}{dS}$$

Иногда мы будем рассматривать поверхности давление в разных точках которой будут разными, но нам нужно будет среднее значение.

Определение 10.3 *Среднее давление - физическая величина, численно равная отношению нормальной составляющей силы, действующую на данную площадку, к ее площади:*

$$p = \frac{F_n}{S}$$

Отметим, что аналогично тому как мы часто писали просто скорость (подразумевая мгновенную) мы будем писать просто давление имея в виду давление в точке.

10.1 Гидростатика

Прежде чем изучать динамику жидкости, нужно изучить частный случай - гидростатику.

Определение 10.4 *Гидростатическое давление - давление столба неподвижной жидкости на определенной глубине по действием силы тяжести.*

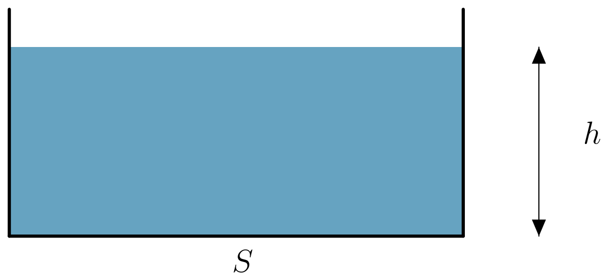


Рис. 10.1: Столб воды в стакане

Пусть у нас есть стакан с водой высотой h, тогда на дно стакана действует сила

$$F = m_{\text{воды}} g$$

$$m_{\text{воды}} = \rho_{\text{воды}} S h$$

Подставляем:

$$F = \rho_{\text{воды}} S h g$$

Тогда давление на дно стакана равно:

$$p = \rho_{\text{воды}} g h$$

Или в общем виде формула гидростатического давления на глубине h:

$$p = \rho_{\text{жидкости}} g h \tag{10.1}$$

10.1.1 Закон Паскаля

Важным отличием жидкости и газа от твердого тела является способность жидкости принимать любую форму. Следствием этого является закон Паскаля.

Определение 10.5 *Закон Паскаля - производимое на жидкость или газ давление передается в любую точку без изменений во всех направлениях.*

Именно из-за закона Паскаля мы "не замечаем" атмосферное давление, так как оно давит на нас со всех сторон. Но, например, присоска работает как раз за счет атмосферного давления, так как со стороны поверхности воздуха (а значит и атмосферного давления нет).

10.2 Сила Архимеда

Рассмотрим тело, погруженное в жидкость (или газ) плотности $\rho_ж$. Для простоты будем считать тело прямоугольным параллелепипедом.

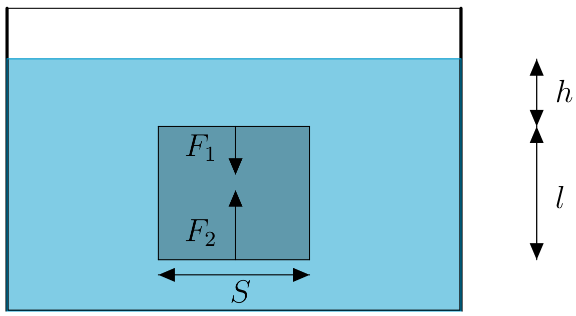


Рис. 10.2: Сила Архимеда

На верхнюю стенку тела жидкость оказывает давление:

$$p_1 = \rho_ж g h$$

А значит сила равна:

$$F_1 = \rho_ж g h S$$

Согласно закону Паскаля, вода действует во все стороны, а значит давление на нижнюю сторону равно:

$$p_2 = \rho_ж g(l + h)$$

А сила равна :

$$F_2 = \rho_ж g(l + h)S$$

Теперь можем найти равнодействующую сил, действующих на тело:

$$F = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F = \rho_ж g(l + h)S - \rho_{жи} g h S = \rho_ж g l S = \rho_ж g V$$

Заметим, что если погружаем тело произвольной формы, то мы всегда можем разбить его на много маленьких прямоугольных параллелепипедов и тогда получим аналогичный результат.
В итоге мы видим, что на тело, погруженное в жидкость (или газ), действует "сила", направленная противоположно силе тяжести. Эта "сила" называется **"силой" Архимеда**:

$$F_{\text{Арх}} = \rho_{\text{ж}} g V \tag{10.2}$$

Важно отметить, что мы не случайно пишем "сила" в кавычках. Нужно понимать, что "сила" Архимеда есть равнодействующая всех сил, действующих со стороны жидкости (газа) на погруженное тело. Поэтому рекомендуется использовать готовую формулу для "силы" Архимеда только в простых случаях, а во всех сложных (например, неоднородные или многослойные жидкости) честно считать давление со всех сторон.

10.2.1 Горизонтальная "сила" Архимеда

Пока мы рассматривали только случай, когда сосуд с жидкостью покоится. Давайте теперь рассмотрим случай, когда сосуд двигается с ускорением a. Для простоты будем считать, что уровень жидкости в сосуде не будет меняться. Выясним, как из-за этого изменится давление в сосуде.
Для начала нужно понять, почему теперь на одном уровне будет разное давление. Если рассмотрим всю воду в аквариуме как единое тело, согласно второму закону Ньютона то левая стенка действует на него сильнее чем правая (так как ускорение направлено вправо). А значит, что давление (среднее давление) жидкости на левую стенку больше, чем на правую.

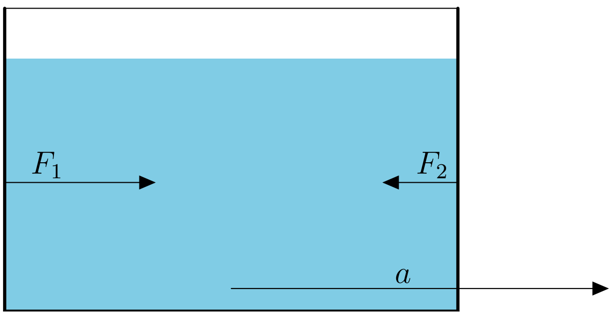


Рис. 10.3: Ускоряющийся аквариум

Теперь выясним чему равна разность давлений, в двух точка находящихся на одном уровне. Мысленно выделим объем жидкости в форме прямоугольного параллелепипеда с поперченным сечением S и длиной стороны L друг от друга. Отметим, что мы выбираем параллелепипед малой высоты, что бы можно было пренебречь изменением давления с глубиной. Масса выделенной жидкости: $m = SL\rho_ж$, где S - площадь

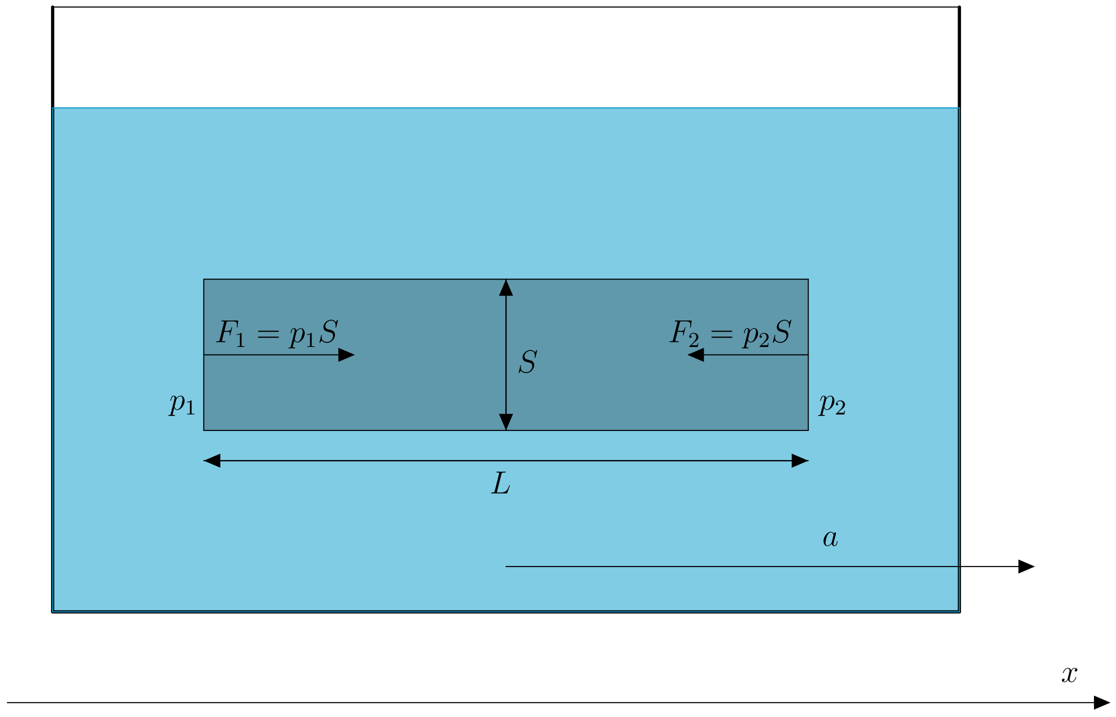


Рис. 10.4: Горизонтальная "сила" Архимеда

поперечного сечения. Обозначим за p_1 давления p_2 - с слева и справа от нашего выделенного объема жидкости. Тогда запишем второй закон Ньютона вдоль оси X:

$$p_1S - p_2S = ma = SL\rho_ж a$$

От сюда получаем, что разность давлений между двумя точкам на одном уровне, зависит только от расстояния между ними и не зависит от глубины их погружения:

$$p_1 - p_2 = L\rho_ж a \tag{10.3}$$

Согласитесь, очень похоже на разность давлений на разных уровнях. А значит напрашивается получить аналог "силы" Архимеда.
Теперь вместо мысленно выделенной жидкости поместим прямоугольный параллелепипед из произвольного материала с площадью бокового сечения S и длинны L.

Используя (10.3) найдем равнодействующую сил действующих на тело в горизонтальном направлении вправо:

$$F_{\text{рав}} = p_1 S - p_2 S = SL\rho_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} aV \tag{10.4}$$

Такую силу мы и будем называть **горизонтальной "силой" Архимеда**:

$$F_{\text{гор. Арх}} = \rho_{\text{ж}} aV \tag{10.5}$$

Заметим, что она не случайно так называется. Если бы мы перешли в неинерциальную СО то на на все тела дополнительно начала действовать сила инерции ma влево. Это очень похоже, как на каждое тело действует сила mg. Можно сказать (условно), что у нас сила тяжести приобрела горизонтальную составляющую, аналогично этому и возникает горизонтальная "сила" Архимеда.
Напоследок хочется записать векторное выражение для силы Архимеда (обычной и горизонтальной):

$$\overrightarrow{F}_{\text{Арх}} = -\rho_{\text{ж}} V \overrightarrow{g} \tag{10.6}$$

$$\overrightarrow{F}_{\text{гор. Арх}} = -\rho_{\text{ж}} V \overrightarrow{a} \tag{10.7}$$

Знак минус показывает, что сила Архимеда и горизонтальная сила Архимеда направлена против ускорения свободного падения и ускорения системы отсчета соответственно.

Упражнение 10.1 *Пластиковый шарик плотностьюρ_0 погружают полностью под воду плотностью $\rho_в > \rho_0$ и привязывают невесомой веревкой ко дну аквариума. Аквариум двигают вправо с ускорением a. На какой угол и куда отклонится шарик от вертикали? Уровень воды можно считать неизменным.*

10.3 Уравнение неразрывности

Гидродинамика является одной из самых сложных и интересных областей физики, но и одной из самых сложных. Поэтому мы будем работать с упрощенной моделью жидкости - идеальной жидкостью.

Определение 10.6 *Идеальная жидкость - физическая модель жидкости, в которой жидкость считается несжимаемой (постоянная плотность), отсутствует трение, вязкость и теплопроводность.*

Рассмотри случай, когда наша идеальная жидкость из трубы с площадью сечения S_1 втекает в трубу с площадью S_2. Пусть в первой трубе скорость жидкости v_1, а во второй - v_2.

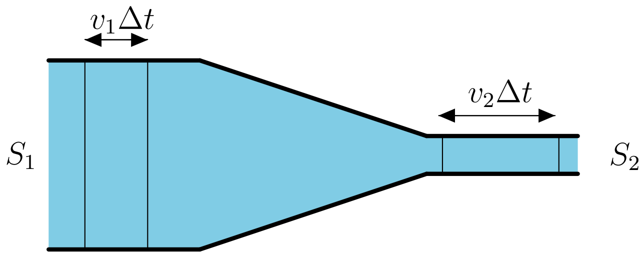


Рис. 10.5: Уравнение неразрывности

За время Δt жидкость в первой трубе прошла расстояние, равное

$$v_1\Delta t,$$

а во второй трубе

$$v_2\Delta t$$

. Для жидкости, как и для любого другого объекта, верен закон сохранения масс :

$$S_1v_1\Delta t\rho_1 = S_2v_2\Delta t\rho_2$$

Но так как жидкость идеальная, то есть несжимаемая, то плотность везде одинаковая:

$$S_1v_1\Delta t\rho = S_2v_2\Delta t\rho$$

После сокращения на $\Delta t\rho$ получаем **уравнение неразрывности**:

$$vS = const \tag{10.8}$$

Заметим, что мы могли получить уравнение неразрывности и для сжимаемой жидкости (или газа):

$$vS\rho = const \tag{10.9}$$

По смыыслу все эти уравнения являются следствием закона сохранения массы.

10.4 Уравнение Бернулли

Теперь разберемся более глобально в поведении жидкости. Пусть жидкость течет по трубе произвольной формы в поле тяжести.
Добавим новые параметры (Рис. 10.4):

- h высота центра масс рассматриваемого объема жидкости
- v - скорость потока
- p - давление в данной точке жидкости

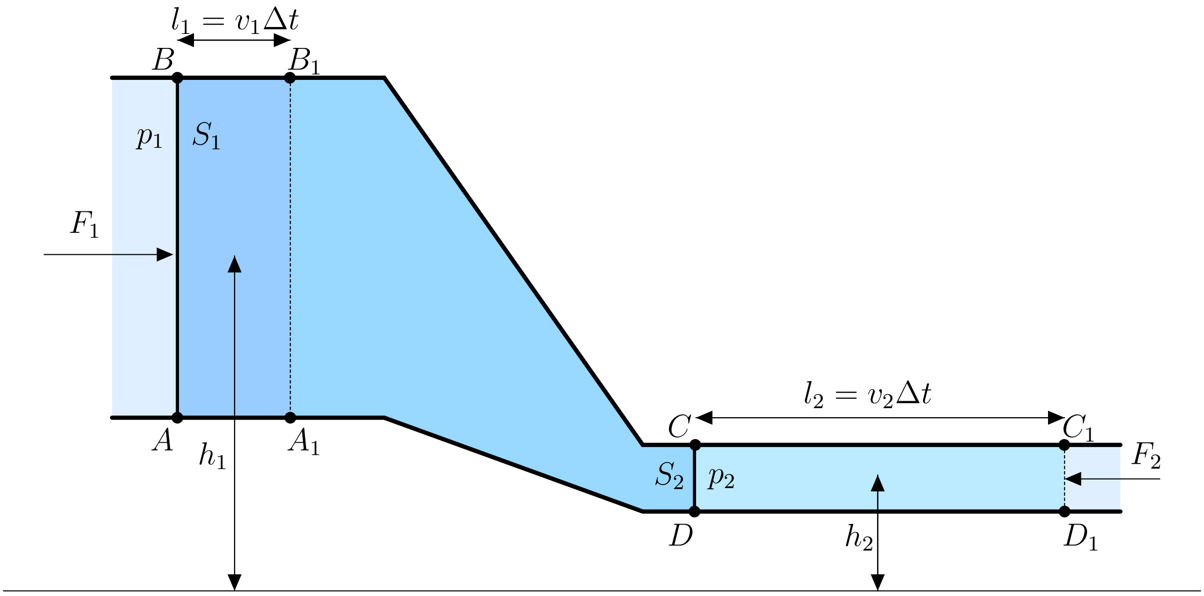


Рис. 10.6: Уравнение Бернулли

Выделим объем жидкости, ограниченный между сечениями AB и CD. Рассмотрим перемещение этой жидкости за время Δt. Сечение AB перейдет в сечение A_1B_1, а CD в C_1D_1. При чем сечения сместятся на :

$$l_1 = v_1\Delta t \tag{10.10}$$
$$l_2 = v_2\Delta t \tag{10.11}$$

Мы хотим использовать закон изменения механической энергии, а для этого нам нужно найти работу внешних сил. Внешними силами по отношению к нашему виртуальному объему будут, силы действующие со стороны жидкости:

$$F_1 = p_1S_1 \tag{10.12}$$
$$F_2 = p_2S_2 \tag{10.13}$$

Тогда запишем работу, заметив, что жидкость передвигает в направлении действия силы F_1 и против силы F_2:

$$A = F_1l_1 - F_2l_2 = p_1S_2v_1\Delta t - p_2S_1v_2\Delta t \tag{10.14}$$

Прежде чем записывать закон изменения энергии отметим, что энергия жидкости, занимающей объем A_1B_1CD не меняется и можем сказать, что объем ABB_1A_1 занял объем DCD_1C_1.
Запишем закон сохранения энергии:

$$\Delta E_K + \Delta E_\Pi = (E_{K2} + E_{\Pi 2}) - (E_{K1} + E_{\Pi 1}) = A \quad (10.15)$$

Подставляя работу сил из (10.14):

$$\frac{(S_2 v_2 \Delta t \rho) v_2^2}{2} - \frac{(S_1 v_2 \Delta t \rho) v_1^2}{2} + (S_2 v_2 \Delta t \rho) g h_2 - (S_1 v_1 \Delta t \rho) g h_1 = \\ = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t \quad (10.16)$$

Так как для жидкости верно уравнение неразрывности (10.8), то $S_1 v_1 = S_2 v_2$, тогда:

$$\frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_2 - \rho g h_1 = p_1 - p_2 \quad (10.17)$$

или:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 \quad (10.18)$$

Полученное выражение называется **уравнением (закон) Бернулли**. Иногда, чтобы подчеркнуть связь закон Бернулли и закона сохранения энергии его записывают следующим образом:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const \quad (10.19)$$

Эту постоянную величину принято называть полным давлением и разделять ее на три части:

- p - статическое давление
- $\rho g h$ - весовое давление
- $\frac{\rho v^2}{2}$ - гидростатическое давление

10.4.1 Формула Торричелли

Из закона Бернулли можно вывести скорость истечения жидкости из открытого сосуда.

Пример 10.1 *В бочке жидкостью с площадью поперечно сечения $S1$ на глубине h проделали дырочку площадью S. С какой скоростью будет выливаться вода?*

Сразу отметим, что так как уровень воды будем меняться, а значит и скорость не постоянна. Поэтом мы сможем найти только мгновенную скорость воды. Пусть уровень воды опускается со скоростью v_1, а вода выливается из дырочки со скоростью v. Тогда учитывая, что атмосферное давление давит и на поверхность воды и на дырочку, то мы можем записать уравнение неразрывности и уравнение Бернулли:

$$\begin{cases} v_1 S_1 = vS \\ p_{\text{атм}} + \rho g h + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_{\text{атм}} + \frac{\rho v^2}{2} \end{cases} \tag{10.20}$$

Из этой системы мы можем найти v, но оставим эту возможность читателю.
Мы же рассмотрим самый частый случай, когда дырочка имеет очень маленькую площадь, а значит скоростью движение уровня воды v_1 можно приберечь.
Тогда полученная система будет эквивалентна одному уравнение:

$$p_{\text{атм}} + \rho g h = p_{\text{атм}} + \frac{\rho v^2}{2} \tag{10.21}$$

От сюда и получаем формулу Торричелли для скорости истечения жидкости из бочки:

$$v = \sqrt{2gh} \tag{10.22}$$

Упражнение 10.2 *Пользуясь формулой Торричелли найдите время за которое выльется вся вода из бочки.*

Литература

[1] Физика. Механика. 10 кл. Профильный уровень. Под ред. Г.Я. Мякишева // М. : Дрофа, 2010 12-е изд.

[2] Физика. Электродинамика. 10-11 кл. Профильный уровень. Под ред. Г.Я. Мякишева // М. : Дрофа, 2010 12-е изд.

[3] Физика для углубленного изучения 1. Механика Бутиков Е.И., А.С. Кондратьев //

[4] Задачи по физике. Под ред. О. Я. Савченко // Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 1999

[5] Общий курс физики. Т.1 Механика. Сивухин Д.В. // М. 1979 г.

[6] Основы физики. Курс общей физики: Учебн. В 2 т. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебния и волны, волновая оптика. Под редакцией Кингсепа А.С. // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001

[7] Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Механика. — Издание 5-е, стереотипное. — М.: Физматлит, 2004. — 224 с. — («Теоретическая физика», том I).

[8] Бугаенко. В., Движение плоскости и теорема Шаля, “Квант” 2009-4, стр. 37-41 , 2010

[9] Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. (В 3-х томах) //М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001

[10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебн. пособие для вузов в 10 т. Т. III. Квантовая механика (нерелятивистская теория) // М.: Наука

Предметный указатель