Лицей “Вторая школа” имени В. Ф. Овчинникова

10 класс, 2024–2025 учебный год
Математический профиль

Бибиков Павел Витальевич

Оглавление

МАТЕРИАЛЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

Декомпозиция и линейность

Во многих задачах полезно использовать соображения *декомпозиции и линейности*. Иначе говоря, решить задачу для достаточно простых стартовых данных, а затем собрать из них решение в общем случае.

Пример: КТО. *Для любых попарно взаимно простых натуральных чисел $m_1, \dots, m_n$ и любых целых чисел $r_1, \dots, r_n$ существует такое целое число x, что $x \equiv_{m_i} r_i$ для любого $i = 1, \dots, n$.*

Доказательство. Докажем, что для каждого $i = 1, \dots, n$ существует такое целое число x_i, что $x_i \equiv_{m_j} \delta_{ij}$ (здесь $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$ и 0, если $i \neq j$). Возьмем для удобства $i = 1$ и рассмотрим числа $m_2 \dots m_n$, $2m_2 \dots m_n$, …, $(m_1 - 1)m_2 \dots m_n$. Все эти числа дают попарно различные остатки при делении на m_1, поэтому среди них есть число x_1, которое дает остаток 1. Очевидно, что оно делится на $m_2, \dots, m_n$.

Теперь возьмем число $x = r_1x_1 + r_2x_2 + \dots + r_nx_n$. Оно будет искомым.

Хороший пример идей декомпозиции и линейности — *задачи интерполяции*. Пусть даны два набора чисел: $x_0, x_1, \dots, x_n$ и $y_0, y_1, \dots, y_n$, причём в первом наборе все числа различны. Требуется найти многочлен F степени не выше n такой, что $F(x_i) = y_i$ при $i = 0, 1, \dots, n$.

1. **Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Реализуйте идею декомпозиции и линейности, построив многочлены F_i, такие, что $F_i(x_j) = \delta_{ij}$, и затем многочлен F.

2. **Интерполяционный многочлен Ньютона.** Реализуйте идею декомпозиции, построив последовательность многочленов $\{f_i\}$, где $i = 0, 1, \dots, n$, таких, что $f_i(x_j) = y_j$ для всех $j \leqslant i$.

3. **Целозначные многочлены.** Многочлен $p(x)$ (с действительными коэффициентами) называется *целозначным*, если он принимает целые значения при всех целых x. Докажите, что многочлен является целозначным тогда и только тогда, когда он представим в виде $a_0 + a_1C_x^1 + a_2C_x^2 + \dots + a_nC_x^n$, где числа $a_0, a_1, \dots, a_n$ — целые и $C_x^k = \dfrac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$.

4. Какую наименьшую степень может иметь приведенный многочлен $f(x)$, такой что $f(a)$ делится на 100 при любом целом a?

5. Многочлен степени n таков, что для любого $i = 0, 1, \dots, n$ выполнено равенство $f(i) = 2^i$. Чему равно $f(n+1)$? (Ответ нужно дать в законченном виде, без знака «…».)

Задачи для самостоятельного решения

1. **(a)** Дан приведенный многочлен $P(x)$ степени $n-1$. Для различных x_1, x_2, …x_n докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = 1.$$

(b) Дан многочлен $P(x)$ степени не более $n-2$. Для различных $x_1, x_2, \dots x_n$ докажите, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P(x_i)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} = 0.$$

2. **(a)** Для любых различных a, b, c, d, e докажите, что

$$\frac{(a-b)(a-c)(a-d)}{(e-b)(e-c)(e-d)} + \frac{(a-b)(a-c)(a-e)}{(d-b)(d-c)(d-e)} + \\ + \frac{(a-b)(a-d)(a-e)}{(c-b)(c-d)(c-e)} + \frac{(a-c)(a-d)(a-e)}{(b-c)(b-d)(b-e)} = 1.$$

(b) Для любых различных a, b, c, d докажите, что

$$\frac{a(b+c+d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b(c+d+a)}{(b-c)(b-d)(b-a)} + \\ + \frac{c(d+a+b)}{(c-d)(c-a)(c-b)} + \frac{d(a+b+c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0.$$

3. Петя и Вася придумали десять многочленов пятой степени. Затем Вася по очереди называл последовательные натуральные числа (начиная с некоторого), а Петя каждое названное число подставлял в один из многочленов по своему выбору и записывал полученные значения на доску слева направо. Оказалось, что числа, записанные на доске, образуют арифметическую прогрессию (именно в этом порядке). Какое максимальное количество чисел Вася мог назвать?

4. Дано натуральное число n. Илья задумал пару различных многочленов степени n с вещественными коэффициентами, аналогично Саша задумал пару различных многочленов степени n. Паше известно число n; его цель — выяснить, одинаковы ли пары многочленов у Ильи и Саши. Паша выбирает набор из k вещественных чисел $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ и сообщает эти числа. В ответ Илья заполняет таблицу $2 \times k$: для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ он вписывает в две клетки i-го столбца пару чисел $P(x_i)$ и $Q(x_i)$ (в любом из двух возможных порядков), где P и Q — задуманные Ильей многочлены. Аналогичную таблицу заполняет Саша. При каком наименьшем k Паша, глядя на таблицы, наверняка сможет добиться своей цели?

5. Многочлен $P(x)$ имеет степень не большую $2n$. Известно, что для каждого целого $k \in [-n, n]$ выполнено неравенство $|P(k)| \leqslant 1$. Докажите, что для любого $x \in [-n, n]$ выполняется неравенство $|P(x)| \leqslant 2^{2n}$.

6. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — различные вещественные числа. Докажите, что выражение $\sum_i \prod_{j\neq i} \dfrac{1 - x_i x_j}{x_i - x_j}$ равно 0 при четном n и 1 — при нечетном n.

Векторные пространства

Идеи декомпозиции и линейности могут быть обобщены для самых разных объектов с помощью общих понятий *векторного пространства*, *линейных комбинаций*, *базиса* и т.д. Первичными операциями, которые мы хотим уметь совершать, являются операция сложения объектов и операция умножения этих объектов на числа. Чтобы зафиксировать первичность этих операций, мы фиксируем их свойства в общем определении, частными случаями которого являются рассмотренные нами ранее примеры.

Определение. *Векторным пространством над полем* $\mathbb{R}$ называется множество V, в котором есть две операции: операция сложения «+» и операция умножения на вещественное число, причем эти операции удовлетворяют всем привычным нам свойствам ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности.

Аналогично можно определять векторное пространство над произвольным полем. Наиболее часто в качестве полей используются поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$.

Важные примеры векторных пространств.

- $\mathbb{E}^2$ — евклидова плоскость;
- $\mathbb{R}^n$ — последовательности вещественных чисел длины n («n-мерное пространство»);
- $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;
- $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{C}[x]$, $\mathbb{Z}_p[x]$ — пространства многочленов с коэффициентами из соответствующих полей;
- множество решений однородной системы линейных уравнений (СЛУ);
- $\{a_n\}$ — множество последовательностей, элементы которых удовлетворяют соотношению $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$ для всех $n \geqslant k$ (линейные рекурренты);
- $\mathcal{F} = \{F(x, y) : F(A_1) = \ldots = F(A_n) = 0\}$ — множество многочленов от двух переменных, обращающихся в нуль в заданных точках.

Реализация идеи декомпозиции заключается в выборе конкретного набора векторов, через которые с помощью операций сложения и умножения на числа можно выразить все другие векторы.

Определение. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — векторы из векторного пространства V. Выражение вида $\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $v_1, \ldots, v_n$. Если существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные 0, для которых линейная комбинация равна 0, то говорят, что векторы $v_1, \ldots, v_n$ *линейно зависимы*. В противном случае говорят, что векторы $v_1, \ldots, v_n$ *линейно независимы*.

Если векторы $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы, и каждый вектор v является их линейной комбинацией $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, то набор $\{e_1, \ldots, e_n\}$ называется *базисом векторного* *пространства V*, а числа $x_1, \ldots, x_n$ — *координатами вектора v в этом базисе.*

Лемма о линейной зависимости. Даны натуральные числа $m > n$. Известно, что векторы $f_1, \ldots, f_m$ являются линейными комбинациями векторов $e_1, \ldots, e_n$. Тогда векторы $f_1, \ldots, f_m$ линейно зависимы.

Следствие. Если у векторного пространства V есть базис, содержащий n векторов, то любой базис этого пространства содержит ровно n векторов. Число n называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается через $\dim V$.

1. Докажите, что наборы векторов **(a)** $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}\}$; **(b*)** $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \sin nx\}$ линейно независимы над полями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ соответственно.

2. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — попарно различные вещественные числа. Определим многочлены $F_0, F_1, \ldots, F_n$ соотношениями $F_i(x_j) = \delta_{ij}$. Докажите, что набор многочленов $\{F_0, F_1, \ldots, F_n\}$ образует базис в пространстве многочленов степени не выше n.

3. Разложите многочлен $P(x)$ степени n по базису $\left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}\right\}$ (т.е. выразите его координаты в этом базисе через сам многочлен P). (*Указание*: для этого полезно использовать производную.)

4. Найдите базис пространства последовательностей Фибоначчи (т.е. последовательностей $\{F_n\}$ вида $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$), состоящий из геометрических прогрессий.

5. На плоскости даны четыре точки A, B, C, D общего положения. Докажите, что пространство $\mathcal{F}$ многочленов степени не выше 2 от двух переменных, обращающихся в нуль в этих точках, двумерно, и найдите какой-нибудь базис этого пространства.

Задачи для самостоятельного решения

1. Изначально все клетки доски 8×8 чёрные. Сколько различных раскрасок можно получить, перекрашивая столбцы и строки?

2. Есть n негорящих лампочек и k выключателей. Каждый выключатель соединён с некоторыми лампочками. При нажатии выключателя все соединённые с ним лампочки меняют своё состояние.
   (a) Докажите, что если $k < n$, то для любого соединения лампочек с выключателями найдётся комбинация горящих лампочек, которую невозможно получить.
   (b) Докажите, что если $k > n$, то для любого соединения можно нажать на некоторые выключатели так, чтобы ни одна лампочка в итоге не загорелась.

3. Есть доска 100×100 с изначально выключенными лампочками в клетках. За одну операцию разрешается поменять состояния всех лампочек в любом кресте (объединение строки и столбца). За какое минимальное число операций всю доску можно включить?

4. Имеется $n+1$ непустых подмножеств n-элементного множества. Докажите, что ненулевую часть из них можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы объединение красных подмножеств совпадало с объединением синих.

Векторные пространства коник и кубик

Теорема Паскаля. Рассмотрим произвольную непустую кривую $\mathcal{C}$, заданную квадратичным многочленом, и отметим на ней шесть точек $A_1, \ldots, A_6$. Обозначим через ℓ_i прямые A_iA_{i+1} (здесь $i = 1, \ldots, 6$). Положим также $P_i = \ell_i \cap \ell_{i+3}$ (здесь $i = 1, 2, 3$ и сложение индексов осуществляется по модулю 6). Тогда точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой.

Доказательство. Рассмотрим кубику $\mathcal{Q} = \mathcal{C} \cdot p$, где $p = P_1P_2$. Кроме того, рассмотрим две кубики $q_1 = \ell_1\ell_3\ell_5$ и $q_2 = \ell_2\ell_4\ell_6$. Заметим, что все три кубики $\mathcal{Q}$, q_1, q_2 проходят через точки A_i, P_1 и P_2. Множество кубик, проходящих через эти точки, является векторным пространством размерности 2, и $\{q_1, q_2\}$ — его базис. Поэтому существуют такие числа λ_1 и λ_2, что $\mathcal{Q} = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$. На q_1, q_2 лежит точка P_3, поэтому $P_3 \in \mathcal{C} \cdot p$. Но $P_3 \notin \mathcal{C}$, поэтому $P_3 \in p$, что и требовалось.

Замечание. В случае вырожденной коники $\mathcal{C}$, являющейся объединением двух прямых, теорема Паскаля превращается в *теорему Паппа*.

> *Даны две прямые ℓ и m. На прямой ℓ отмечены точки L_i, а на прямой m — точки M_j, где i, $j = 1, 2, 3$. Пусть $P_i = L_iM_{i+1} \cap L_{i+1}M_i$, где $i = 1, 2, 3$. Докажите, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой.*

Замечание. Во многих (но не во всех!) задачах далее можно считать конику окружностью.

1. Пусть коника $\mathcal{C}$ проходит через точки A, B, C, D. Обозначим через ℓ_{AB} уравнение прямой AB, и т.д. Докажите, что найдутся такие числа λ и μ, для которых верно равенство
$$\mathcal{C} = \lambda \ell_{AB} \cdot \ell_{CD} + \mu \ell_{BC} \cdot \ell_{AD}.$$

2. **Теорема о девяти точках на кубике.** Даны шесть прямых ℓ_i, m_j, где i, $j = 1, 2, 3$ общего положения. Пусть $A_{ij} := \ell_i \cap m_j$. Кубика $\mathcal{K}$ проходит через точки A_{ij} для всех i, j, за исключением, быть может, точки A_{33}. Докажите, что тем не менее точка A_{33} лежит на $\mathcal{K}$.

3. Восьмиугольник вписан в конику. Обозначим через ℓ_i, $i = 1, \ldots, 8$ прямые, последовательно содержащие его стороны. Докажите, что точки пересечения прямых ℓ_i и ℓ_{i+3} лежат на одной конике.

Задачи для самостоятельного решения

1. **(a)** В конику $\mathcal{C}$ вписаны два четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Обозначим через $XYZT$ четырехвершинник, образованный прямыми AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 (т.е. его стороны последовательно лежат на указанных прямых). Также отметим точки U и V пересечения прямых AC и BD, A_1C_1 и B_1D_1 соответственно. Докажите, что точки X, Y, Z, T, U и V лежат на одной конике.
   (b) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Проведем биссектрисы его углов и обозначим через X, Y, Z и T точки пересечения двух соседних биссектрис. Обозначим также через O центр окружности $(ABCD)$ и через P точку пересечения его диагоналей. Докажите, что точки X, Y, Z, T, O и P лежат на одной конике.

2. **Теорема Штейнера.** На конике $\mathcal{C}$ выбраны точки A_1, ..., A_6. Докажите, что прямые Паскаля шестивершинников
   $$A_1A_2A_3A_4A_5A_6, \quad A_1A_4A_5A_2A_3A_6, \quad A_1A_4A_3A_6A_5A_2$$
   пересекаются в одной точке.

3. **(a)** Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые BC и AD — в точке Q. Кубика $\mathcal{K}$ проходит через точки A, B, C, D, P и Q. Докажите, что касательные к кубике $\mathcal{K}$, проведенные в точках P и Q, пересекаются на $\mathcal{K}$.
   (b) Прямая пересекает кубику в точках A, B и C. Касательные к кубике, проведенные в этих точках, повторно пересекают ее в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой. (*Указание.* Наличие касательных указывает на то, что какие-то точки или прямые склеиваются…)

4. **Открытая задача.** Дан четырехвершинник $ABCD$. Продолжения его противоположных сторон AB и CD пресекаются в точке E, а продолжения сторон BC и AD — в точке F. На плоскости выбрана произвольная точка P. Прямые AP, BP, CP и DR повторно пересекают прямые AB, BC, CD и DA в восьми точках. Докажите, что эти восемь точек, а также точки E и F лежат на одной кубике.

Пространства решений СЛУ

Определение. Пусть $\{a_{ij}\}$, $\{b_i\}$ — наборы вещественных чисел, где $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, m$. Множество уравнений $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i$ называется *системой линейных уравнений* (СЛУ). Множество ее решений обозначим через $V(S)$. Множество $V(S)$ является подмножеством в пространстве $\mathbb{R}^m = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in \mathbb{R}\}$ строк вещественных чисел длины m. В случае, когда $b_j = 0$ для всех j, система называется *однородной*. В случае, когда $m = n$, система называется *квадратной*. Заметим, что если S — однородная СЛУ, то множество ее решений $V(S)$ является векторным пространством.

Как описать пространство $V(S)$? Для этого используется *метод Гаусса* преобразования СЛУ S. А именно, с системой S можно совершать следующие операции, не изменяя пространства решений $V(S)$:

- прибавить к одной строке другую;
- умножить любую строку на ненулевое число;
- поменять местами любые две строки.

С помощью таких операций любую СЛУ можно привести к *ступенчатому виду*:

$$\begin{cases} a_{1p}x_p + \ldots\ldots\ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \quad a_{2q}x_q + \ldots\ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad a_{kt}x_t + \ldots + a_{km}x_m = b_k \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{k+1} \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_n, \end{cases}$$

где $p < q < \ldots < t$ и $a_{1p}, \ldots, a_{kt} \neq 0$.

Отсюда следует, что любая СЛУ имеет или 0, или 1, или бесконечно много решений: переменные $x_p, x_q, \ldots, x_t$ выражаются через остальные переменные, которые в свою очередь принимают произвольные значения. Переменные $x_p, x_q, \ldots, x_t$ называются *зависимыми*, а все остальные переменные — *свободными*. Для однородной системы S размерность $\dim V(S)$ равна количеству свободных переменных.

1. **(a)** Приведите к ступенчатому виду СЛУ $\begin{cases} x + 5y + 4z + 3t = 1 \\ 2x - y + 2z - t = 0 \\ 5x + 3y + 8z + t = 1. \end{cases}$ **(b)** Запишите общее решение этой системы, выразив зависимые переменные через свободные. **(c)** Укажите базис соответствующей однородной СЛУ в пространстве $\mathbb{R}^4$.

2. **(a)** Докажите, что если для однородной системы S имеет место неравенство $m > n$, то пространство решений $V(S)$ содержит ненулевой вектор (и, как следствие, прямую, натянутую на этот вектор).
(b) Докажите, что если некоторая СЛУ с рациональными коэффициентами имеет вещественное решение, то она имеет и рациональное решение.

3. **(a)** Докажите, что если S — однородная СЛУ с пространством решений $V(S)$, а S' — неоднородная СЛУ с такой же как у S левой частью и решением $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$, то любое решение системы S' получается из $\mathbf{x}^0$ прибавлением некоторого вектора из пространства $V(S)$.
(b) Пусть S — квадратная однородная СЛУ, а S' — неоднородная СЛУ с такой же как у S левой частью. Известно, что система S имеет единственное решение. Докажите, что система S' также имеет единственное решение.

4. Петя вписал числа в клетки квадрата 3×3 так, что получился магический квадрат. Числа в каком наименьшем количестве клеток должен узнать Вася, чтобы восстановить весь квадрат?

5. Имеется клетчатая таблица $(k+2) \times (\ell+2)$, в её граничных клетках расставлены какие-то действительные числа. Докажите, что в клетках центрального прямоугольника $k \times \ell$ можно единственным образом расставить числа так, чтобы каждое из этих $k\ell$ чисел равнялось среднему арифметическому своих четырёх соседей по стороне.

6. Есть n монет неизвестной массы и весы. Разрешается положить несколько монет на одну чашу весов и такое же количество монет на другую чашу весов. Весы либо указывают, что массы на двух чашах равны, либо указывают, какая чаша тяжелее. Докажите, что потребуется по крайней мере $n-1$ взвешиваний, чтобы определить, все ли монеты имеют одинаковую массу.

Задачи для самостоятельного решения

1. Внутри отрезка $[0, 1]$ выбрали n различных точек. *Отмеченной точкой* назовём одну из выбранных или конец отрезка. Оказалось, что любая из внутренних n точек является серединой какого-то отрезка с концами в отмеченных точках. Докажите, что все выбранные точки рациональны.

2. Дана таблица $m \times n$, заполненная вещественными числами. Известно, что сумма чисел в любой строке и в любом столбце целая. Докажите, что можно округлить каждое нецелое число в таблице вверх или вниз так, чтобы суммы новых чисел в каждой строке и столбце совпали бы с исходными суммами.

3. На математической конференции каждые два математика либо знакомы, либо незнакомы. Математики собрались на банкет, который проходит в двух больших столовых. Каждый математик хочет находиться в том помещении, в котором находится четное число его знакомых. Известно, что существует способ рассадить математиков по столовым так, чтобы удовлетворить пожелания каждого из них. Докажите, что тогда количество таких рассадок равно степени двойки.

Матрицы и определители

При изучении систем линейных уравнений удобно использовать язык матриц. Матрица — это прямоугольная таблица из чисел. Сами числа (элементы матрицы) индексируются двумя индексами, первый из которых обозначает номер строки, а второй — номер столбца. Т.е. пишут $A = (a_{ij})$, имея в виду запись $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Также говорят, что матрица A имеет размер $m \times n$. Матрица $A^T = (a_{ji})$ называется *транспонированной к* A и имеет размер $n \times m$.

Если $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор, то произведением $A\mathbf{v}$ является вектор, чьи компоненты получаются скалярным перемножением строк матрицы A на вектор $\mathbf{v}$ (например, $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n$). Таким образом, пространство решений системы линейных уравнений — это в точности множество векторов $\mathbf{v}$, таких, что $A\mathbf{v} = 0$.

1. **(a)** Решите систему уравнений $\begin{cases} ax + by = e, \\ cx + dy = f \end{cases}$.

(b) Пусть $\overline{v}_1 = (x_1, y_1)$ и $\overline{v}_2 = (x_2, y_2)$ — два вектора на плоскости $\mathbb{E}^2$. Вычислите площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$.

Определение. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — матрица 2×2. Тогда величина $\det A := ad - bc$ называется *определителем* матрицы A.

Геометрически определитель матрицы — это ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы–столбцы матрицы A: если $\overline{v}_1 = \binom{a}{c}$ и $\overline{v}_2 = \binom{b}{d}$, то $\det(A) = \det(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$.

2. Используя геометрический смысл определителя матрицы, докажите следующие его свойства:
(a) $\det(\overline{v}_1, \overline{v}_2) = -\det(\overline{v}_2, \overline{v}_1)$,
(b) $\det(\lambda\overline{v}_1, \overline{v}_2) = \lambda \cdot \det(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$,
(c) $\det(\overline{v}_1, \overline{v}_2 + \overline{v}_3) = \det(\overline{v}_1, \overline{v}_2) + \det(\overline{v}_1, \overline{v}_3)$,
(d) $\det A = \det A^T$.

3. Определитель матрицы 3×3 — это ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на три вектора $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$.
(a) Докажите свойства **(a)** – **(c)** определителя матрицы 3×3 из предыдущей задачи.

(b) Выведите явную формулу для определителя матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

Определение. Пусть x_1, x_2, ..., x_n — перестановка чисел 1, 2, ..., n в каком-то порядке. *Инверсией* называется пара чисел (x_i, x_j) такая, что $i < j$, но $x_i > x_j$. Перестановка x_1, x_2, ..., x_n называется *чётной*, если в ней чётное число инверсий, и *нечётной* в противном случае. *Знак* перестановки σ — это величина $\operatorname{sgn}(\sigma)$, равная $+1$, если перестановка σ четна, и -1, если нечетна.

Любую перестановку можно изобразить в виде ориентированного графа: вершины графа — числа 1, 2, ..., n; ребро $i \to j$ означает, что $\sigma(i) = j$. *Циклом перестановки* называется цикл соответствующего графа.

1. **(a)** Чему равен знак перестановки $(n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$?
   (b) Докажите, что транспозиция двух элементов перестановки меняет ее четность.
   (c) Докажите, что четных и нечетных перестановок поровну.

2. Докажите, что следующие свойства эквивалентны:

   - перестановка содержит чётное количество инверсий;
   - перестановку можно получить из тождественной, используя чётное количество транспозиций;
   - перестановку нельзя получить из тождественной, используя нечётное количество транспозиций;
   - перестановка содержит чётное количество циклов чётной длины.

3. В некотором городе разрешаются только парные обмены квартир (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не имеют права участвовать в другом обмене). Докажите, что любой обмен квартирами можно осуществить за два дня.

4. Пусть $A = (\overline{v}_1, \dots, \overline{v}_n)$ — матрица размера $n \times n$. *Определитель* матрицы A — это функций от координат векторов $\overline{v}_i$, которая линейна по каждому аргументу и кососимметрична по каждой паре аргументов (т.е. при транспозации любых двух аргументов функция меняет знак). Докажите, что если $\overline{v}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T$, то

   $$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

   где $\operatorname{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки σ.

Операции над матрицами

В прошлых листках мы связали с каждой матрицей A ее определитель $\det A$. Теперь наша цель — изучить операции над матрицами и понять, как определитель матрицы меняется при этих операциях. Одна такая операция нам уже известна — это транспонирование матрицы, т.е. замена ее строк на столбцы, и наоборот. Как мы помним, для квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ ее определитель равен $\det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}$. Заметим, что $A^T = (a_{ji})$, поэтому $\det A^T = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n} =$
$= \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1} a_{\sigma^{-1}(2)2} \ldots a_{\sigma^{-1}(n)n} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} = \det A$. Теперь изучим операции между несколькими матрицами.

Определение. *Суммой матриц* $A = (a_{ij})$ *и* $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Т.е. сложение матриц происходит покомпонентно.
Произведением матриц $A = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)^T$ *размера* $n \times k$ *и* $B = (\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_m)$ *размера* $k \times m$ называется матрица $C = AB = (\overline{v_i} \cdot \overline{w}_j)$ размера $n \times m$. Иначе говоря, чтобы найти элемент, находящийся в матрице AB в i-й строке и j-м столбце, нужно скалярно перемножить вектор-строку $\overline{v}_i$ матрицы A и вектор-столбец $\overline{w}_j$ матрицы B.
Единичной матрицей E называется матрица (δ_{ij}) размера $n \times n$ (т.е. ее диагональные элементы равны 1, а все остальные элементы равны 0).
Обратной матрицей к квадратной матрице A размера $n \times n$ называется матрица A^{-1}, такая, что $AA^{-1} = E$.

Для вычисления определителей матриц большого размера удобно пользоваться следующим алгоритмом. Будем рассматривать матрицу $A = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)^T$ как матрицу, состоящую из векторов, записанных по строкам. Заметим, что если сделать элементарное преобразование строк этой матрицы (заменив вектор $\overline{v}_i$ на вектор $\overline{v}_i' = \overline{v}_i + \lambda \cdot \overline{v}_j$), то определитель не изменится, поскольку

$$\det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_i', \ldots \overline{v}_n)^T = \det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_i + \lambda \cdot \overline{v}_j, \ldots \overline{v}_n)^T = \det(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_i, \ldots \overline{v}_n)^T + \det(\overline{v}_1, \ldots, \lambda \cdot \overline{v}_j, \ldots \overline{v}_n)^T.$$

Но второе слагаемое равно 0, поскольку объем параллелепипеда, составленного из набора с двумя одинаковыми векторами, равен 0. Таким образом, мы сможем привести матрицу A к треугольному виду, а определитель такой матрицы считается совсем легко.

1. Вычислите произведения AB и BA следующих матриц: **(a)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; **(b)** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; **(c)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Вычислите A^{-1} и B^{-1} для следующих матриц: **(a)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; **(b)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **(a)** Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. Вычислите $\det A$.

(b) Вычислите определители следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Докажите, что для квадратных матриц A и B справедливо равенство $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

4. Пусть $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ и $\overline{v}_3$ — три вектора единичной длины в трехмерном пространстве, и $A = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$ — матрица, составленная из столбцов координат этих векторов.

(a) Пусть α_{ij} — это угол между векторами $\overline{v}_i$ и $\overline{v}_j$. Вычислите матрицу $A^T A$ (она называется *матрицей Грама системы векторов* $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$).

(b) Выразите объем V параллелепипеда, натянутого на векторы $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ и $\overline{v}_3$, через углы α_{ij}.

(c) Докажите, что если $x + y + z = 0$, то $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 2\cos x \cos y \cos z = 1$.

Ранги матриц

Ранее мы связали с каждой квадратной матрицей A размера $n \times n$ некоторое число $\det A$, которое называлось определителем матрицы A, и доказали, что однородная система линейных уравнений, заданная матрицей A, имеет единственное решение, если и только если $\det A \neq 0$ (такие матрицы называются *невырожденными*). Сейчас мы рассмотрим вопрос о том, что происходит в случае $\det A = 0$. Как мы помним, в этом случае множество решений соответствующей СЛУ является векторным пространством. Оказывается, размерность этого векторного пространства является важной характеристикой матрицы A. Рассмотрим ее подробнее.

Напомним, что матрицу $n \times n$ можно рассматривать как набор из n векторов векторного пространства $\mathbb{R}^n$, координаты которых записаны по столбцам, и в таком случае $\det A$ — это ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на эти векторы. Также ранее мы доказали, что $\det A = \det A^T$, т.е. можно рассматривать координаты векторов, записанных в строку. Именно так мы и будем делать: сейчас для нас будет удобна именно такая нотация.

Итак, рассмотрим матрицу A размера $n \times m$, состоящую из n строк и m столбцов, причем строки матрицы A будем считать векторами $\overline{v}_1$, ..., $\overline{v}_n$: $A = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$.

Определение. *Рангом* матрицы $A = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$ называется максимальное количество линейно независимых векторов из набора $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$. Иначе говоря ранг $\operatorname{rk} A$ матрицы A — это размерность векторного пространства, порожденного векторами $\overline{v}_1$, ..., $\overline{v}_n$.

Теорема. Пусть $A = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$ — матрица размера $n \times m$ однородной СЛУ S, и $V(S)$ — векторное пространство решений этой СЛУ. Тогда $\dim V(S) = m - \operatorname{rk} A$.

Доказательство. Приведем матрицу A к ступенчатому виду. С точки зрения векторов это означает, что на каждом шаге мы заменяем вектор-строку на линейную комбинацию этого вектора и какого-то другого вектора из нашей матрицы. Поскольку наличие или отсутствие линейной зависимости векторов не меняется при замене этих векторов на их линейные комбинации, ранг матрицы не меняется в результате приведения ее к ступенчатому виду. Поэтому можно считать, что матрица A имеет ступенчатый вид.

Заметим, что в таком случае все ненулевые строки матрицы A — это в точности максимальная система линейно независимых векторов в ней (остальные векторы равны $\overline{0}$, а оставшиеся содержат зависимые переменные, поэтому между ними нет зависимостей). Значит, $\operatorname{rk} A$ — это количество ненулевых строк в ее ступенчатом виде. С другой стороны, каждая ненулевая строка содержит ровно одну зависимую переменную, поэтому количество независимых переменных равно $m - \operatorname{rk} A$. Но это и есть размерность векторного пространства решений СЛУ, что и требовалось доказать.

1. Вычислить ранги следующих матриц: **(a)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, **(b)** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, **(d)** $\begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & -4 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Докажите, что для квадратной матрицы A размера $n \times n$ условие $\det A \neq 0$ равносильно условию $\operatorname{rk} A = n$.

3. **(a)** Докажите, что если в матрице A можно выбрать r строк и r столбцов, таких, что матрица B, образованная элементами, стоящими на их пересечении, невырождена (т.е. $\operatorname{rk} B = r$), то $\operatorname{rk} A \geqslant r$.
(b) Докажите, что если $\operatorname{rk} A \geqslant r$, то в матрице A можно выбрать r строк и r столбцов, таких, что матрица B, образованная элементами, стоящими на их пересечении, невырождена.

Следствие. Ранг матрицы — это размер максимальной невырожденной ее подматрицы.

4. Докажите, что $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$. В частности, отсюда следует, что ранг матрицы равен максимальному количеству линейно независимых векторов-столбцов.

Связь ранга и операций над матрицами

Напоминание. *Ранг матрицы A размера $n \times k$*, состоящей из вектор-столбцов $\overline{a}_1$, ..., $\overline{a}_k$, равен максимальному количеству линейно независимых векторов этого набора.
Ранг матрицы B размера $k \times m$, состоящей из вектор-строк $\overline{b_1}$, ..., $\overline{b}_k$, равен максимальному количеству линейно независимых векторов этого набора.
Ранг матрицы равен размерности векторного пространства, порожденного ее вектор-столбцами. Иначе говоря, с каждой матрицей $A = (\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_k)$ можно связать векторное пространство V_A, чьи элементы — это всевозможные линейные комбинации векторов $\overline{a}_1$, ..., $\overline{a}_k$, и тогда $\operatorname{rk} A = \dim V_A$.
Аналогично, с каждой матрицей B, образованной вектор-строками $B = (\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_k)^T$, можно связать векторное пространство V_B, чьи элементы — это всевозможные линейные комбинации векторов $\overline{b}_1$, ..., $\overline{b}_k$, и тогда $\operatorname{rk} B = \dim V_B$.
Наконец, ранг матрицы равен максимальному размеру ее невырожденной подматрицы.

1. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $n \times k$ и $B = (b_{ij})$ — матрица размера $k \times m$. Определим матрицу $C = AB = (c_{ij})$ размера $n \times m$ как произведение матриц A и B.
(a) Запишите элементы c_{11}, c_{21}, ..., c_{k1} через a_{ij} и b_{ij}.
(b) Запишите вектор-столбец $\overline{c}_1 = (c_{11}, c_{21}, \dots, c_{k1})$ через матрицу A и вектор-столбец $\overline{b}_1$.
(c) Докажите, что $\operatorname{rk}(AB) \leqslant \operatorname{rk} B$.
(d) Докажите, что $\operatorname{rk}(AB) \leqslant \operatorname{rk} A$.
(e) Докажите, что если матрицы A и B квадратные, причем матрица B невырождена, то $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} A$.

2. **(a)** Пусть V, $W \subseteq U$ — векторные подпространства в векторном пространстве U. Определим сумму $V + W$ векторных пространств V и W как всевозможные суммы векторов из V и W: $V + W = \{v + w \,:\, v \in V, w \in W\}$. Докажите, что $\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$.
(b) Пусть $A = (\overline{a}_1, \dots, \overline{a}_m)$ и $B = (\overline{b}_1, \dots, \overline{b}_m)$ — матрицы одинакового размера, образованные вектор-столбцами. Определим векторные пространства V_A, V_B и V_{A+B} как пространства, образованные всевозможными линейными комбинациями вектор-столбцов соответствующих матриц. Докажите, что $V_{A+B} \subseteq V_A + V_B$.
(c) Докажите, что $\operatorname{rk}(A + B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$.

3.* Пусть A — квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$, все недиагональные элементы которой одинаковы и равны $t \geqslant 0$, а все диагональные элементы строго больше t. Докажите, что матрица A невырождена. (*Указание*: рассмотрите матрицу $D = A - tJ$, где $J = (1)$ — матрица из единиц, и докажите, что однородная СЛУ $D\overline{v} = -tJ\overline{v}$ имеет лишь нулевое решение.)

Ранги и комбинаторика

Напоминания. *Ранг* $\operatorname{rk} A$ *матрицы* A *размера* $n \times k$ равен максимальному количеству линейно независимых вектор-строк, а также равен максимальному количеству линейно независимых вектор-столбцов. В частности, $\operatorname{rk} A \leqslant \min(n, k)$.

Суммой матриц $A = (a_{ij})$ *и* $B = (b_{ij})$ одинакового размера называется матрица $C = A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Т.е. сложение матриц происходит покомпонентно.
Произведением матриц $A = (\overline{v}_1, \dots \overline{v}_n)^T$ *размера* $n \times k$ *и* $B = (\overline{w}_1, \dots, \overline{w}_m)$ *размера* $k \times m$ называется матрица $C = AB = (\overline{v_i} \cdot \overline{w}_j)$ размера $n \times m$. Иначе говоря, чтобы найти элемент, находящийся в матрице AB в i-й строке и j-м столбце, нужно скалярно перемножить вектор-строку $\overline{v}_i$ матрицы A и вектор-столбец $\overline{w}_j$ матрицы B.
Единичной матрицей E называется матрица (δ_{ij}) размера $n \times n$ (т.е. ее диагональные элементы равны 1, а все остальные элементы равны 0).
Обратной матрицей к квадратной матрице A размера $n \times n$ называется матрица A^{-1}, такая, что $AA^{-1} = E$.

Имеют место следующее неравенство: $\operatorname{rk}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$. Также если матрица B квадратная и невырожденная, то $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} A$.

Важный факт. Пусть A — квадратная матрица над полем $\mathbb{R}$, все недиагональные элементы которой одинаковы и равны $t \geqslant 0$, а все диагональные элементы строго больше t. Тогда матрица A невырождена.

Мысль. В задачах, в которых фигурируют множества, можно ввести матрицу следующим образом. Пусть x_1, ..., x_n — это элементы некоторого множества, а U_1, ..., U_k — это подмножества, состоящие из этих элементов. Тогда определим матрицу $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1$, если $x_i \in U_j$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. В результате каждый вектор-столбец получившейся матрицы A состоит из 0 и 1 и кодирует элементы, принадлежащие матрице A.

Определение. Такая матрица называется *матрицей инцидентностей* набора подмножеств U_1, ..., U_k.

Полезно бывает работать с такими матрицами как с матрицами над полем $\mathbb{Z}_2$, особенно когда речь идет о четности или нечетности.

1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — это элементы некоторого множества, а $U_1, \ldots, U_k$ — это подмножества, состоящие из этих элементов. Рассмотрим матрицу инцидентностей A набора подмножеств $U_1, \ldots, U_k$. Какой комбинаторный смысл имеют элементы следующих матриц: **(a)** $A^T A$; **(b)** AA^T?

2. Пусть X — конечное множество из n элементов, а $\mathcal{F}$ — семейство его собственных подмножеств, такое, что для каждой пары различных элементов из X есть единственное подмножество из $\mathcal{F}$, которое их содержит. Докажите, что $|\mathcal{F}| \geqslant n$.

3. Пусть X — конечное множество из n элементов, а $\mathcal{F}$ — семейство его собственных подмножеств, такое, что каждое подмножество из $\mathcal{F}$ содержит нечетное количество элементов, а любые два подмножества из $\mathcal{F}$ пересекаются по четному (возможно, нулевому) числу элементов Докажите, что $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

4. Пусть $\mathcal{F} = \{U_1, \ldots, U_k\}$ — набор различных подмножеств множества из n элементов, такой, что все пересечения $U_i \cap U_j$ для $i \neq j$ имеют фиксированный размер $t \in [1; n]$.
   (a) Докажите, что если для некоторого i справедливо равенство $|U_i| = t$, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.
   (b) Докажите, что если для всех i имеет место неравенство $|U_i| > t$, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

5. Не существует четырех точек на плоскости, все попарные расстояния между которыми нечетны.
   (a) Пусть векторы, направленные из начала координат в четыре данные точки, равны $\overline{0}$, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ и $\overline{v}_3$. Пусть также $A = (\overline{v}_1|\overline{v}_2|\overline{v}_3|)$ — матрица 2×3, составленная из координат векторов $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ и $\overline{v}_3$, записанных по столбцам. Вычислите матрицу $G := 2A^T A \mod 8$ (т.е. вычислите элементы матрицы G как остатки элементов матрицы $2A^T A$ по модулю 8).
   (b) Исследуйте определитель и ранг матрицы G и решите исходную задачу.

Матрицы в графах

Определение. *Расстоянием* между двумя вершинами u и v графа G называется длина наименьшего пути, соединяющего эти вершины.

Определение. *Матрицей смежности* A_G графа G называется матрица $A_G = (a_{ij})$, где $a_{ij} = 1$, если вершины i и j являются смежными, и 0 в противном случае. Заметим, что $A_G^T = A_G$, т.е. матрица смежностей является симметрической.

Определение. Пусть $\bar{e} \in \mathbb{R}$ — такой вектор, что $A\bar{e} = \lambda\bar{e}$ для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{R}$. Вектор $\bar{e}$ называется *собственным вектором* матрицы A, а число λ — *собственным значением* матрицы A_G.
Можно доказать, что если матрица A размера $n \times n$ симметрическая (т.е. $a_{ij} = a_{ji}$), то у нее существует в точности n различных собственных векторов, причем эти векторы попарно ортогональны друг другу.

Мысль. Полезно умножать матрицу смежностей A_G графа G на вектор-столбец $(1, 1, \dots, 1)^T$.

1. Рассмотрим матрицу смежности A_G произвольного графа G. Докажите, что в матрице A_G^k (k-ая степень матрицы A_G) на месте (i, j) стоит число, равное количеству различных путей между вершинами i и j длины ровно k. (Напомним, что умножение матрицы происходит по правилу «строка на столбец»: мы берем i-ую строку и j-ый столбец и скалярно умножаем их друг на друга.)

2. На встречу пришли $2n$ людей. Каждый человек знаком с четным количеством других людей (знакомство взаимно). Докажите, что есть пара человек, имеющая четное число общих знакомых.

3. Назовем *костепенью* пары вершин графа количество вершин графа, смежных с ними обеими. Докажите, что если все костепени графа на n вершинах нечетны, то и n нечетно.

4. В классе учится нечетное количество школьников. Докажите, что можно выбрать такую команду ребят из этого класса, чтобы у каждого человека (включая тех, кто в команде) было четное количество друзей в команде.

О спектральной теории графов

Определение. *Расстоянием* между двумя вершинами u и v графа G называется длина наименьшего пути, соединяющего эти вершины.
Диаметр связного графа G — это наибольшее из расстояний между его вершинами.
Обхват связного графа G — это длина наименьшего цикла в этом графе.

Теорема. Связный граф диаметра k и обхвата $2k+1$ регулярен, причем при $k = 2$ степень каждой вершины может принимать лишь значения 2, 3, 7 или 57.

Замечание. До сих пор неизвестно, существуют ли такие регулярные графы со степенью вершин 57.

1. В этом пункте мы докажем, что связный граф диаметра k и обхвата $2k+1$ регулярен.
(a) Рассмотрим две вершины графа на расстоянии k. Докажите, что они имеют одинаковую степень.
(b) Рассмотрим минимальный цикл графа. Докажите, что любые две его вершины имеют одинаковую степень.
(c) Докажите, что граф регулярен.

2. Начиная с этой задачи мы считаем, что $k = 2$, т.е. исследуем связные графы диаметра 2 и обхвата 5. Пусть d — степень каждой вершины такого графа, а n — количество вершин. Докажите, что $n = d^2 + 1$.

3. Пусть A_G — матрица смежности графа из нашей задачи. Докажите, что

$$A_G + A_G^2 = \begin{pmatrix} d & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & d & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & d & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & d \end{pmatrix}.$$

Определение. Пусть $\overline{e} \in \mathbb{R}$ — такой вектор, что $A\overline{e} = \lambda\overline{e}$ для некоторого числа $\lambda \in \mathbb{R}$. Вектор $\overline{e}$ называется *собственным вектором* матрицы A, а число λ — *собственным значением* матрицы A_G.
Можно доказать, что если матрица A размера $n \times n$ симметрическая (т.е. $a_{ij} = a_{ji}$), то у нее существует в точности n различных собственных векторов, причем эти векторы попарно ортогональны друг другу.

4. Пусть $\overline{e}_0 = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ и A_G — матрица смежности графа из нашей задачи. Докажите, что вектор $\overline{e}_0$ является собственным вектором матрицы A_G, и найдите соответствующее ему собственное значение.

5. Пусть $\overline{e} \neq \overline{e}_0$ — произвольный собственный вектор матрицы A_G с собственным значением λ. Вычислите $(A_G + A_G^2)\overline{e}$ и докажите, что $\lambda^2 + \lambda - (d-1) = 0$.

6. Из предыдущей задачи следует, что все собственные значения матрицы A_G, кроме собственного значения вектора $\overline{e}_0$, равны либо λ_1, либо λ_2, где $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{4d-3}}{2}$. Пусть первое собственное значение встречается у m_1 векторов, а второе — у m_2 векторов.
   (a) Докажите, что $m_1 + m_2 = d^2$.
   (b) Докажите, что $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 = -d$.

7. Пусть $s = \sqrt{4d-3}$. Докажите, что число s является натуральным.

8. Докажите, что число s может равняться лишь 1, 3, 5 или 15. Выведите отсюда **теорему**.