

Инвариант

1. Над девятизначным числом разрешается производить следующее действие: любую цифру числа можно заменить на последнюю цифру суммы цифр этого числа. Можно ли с помощью таких действий из числа 111555777 получить число 123456789?
2. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a + 1$ и $b + 1$; второй по карточке с четными числами a и b выдает карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами a, b и b, c выдает карточку с числами a, c . Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки (5, 19) получить карточку (1, 2025)?
3. В таблице 8×8 все четыре угловые клетки закрашены чёрным цветом, все остальные – белым. Докажите, что с помощью перекрашивания строк и столбцов нельзя добиться того, чтобы все клетки стали белыми. Под перекрашиванием строки или столбца понимается изменение цвета всех клеток в строке или столбце.
4. На доске 15×15 стоят 15 не бьющих друг друга ладей. Каждую ладью передвинули ходом коня 15 раз. Докажите, что теперь какие-то две ладьи бьют друг друга.
5. Есть три кучки камней: в первой — 51, во второй — 49, в третьей — 5. Разрешается объединять две кучки в одну или разделять кучку с чётным числом камней на две равных. Можно ли через некоторое время получить 105 кучек по одному камню?
6. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$. Выбираем из написанных на доске два произвольных числа a и b , стираем их и пишем на доску число $a + b + ab$. Такую операцию проделываем 99 раз, пока не останется одно число. Какое это число? Найдите его и докажите, что оно не зависит от последовательности выбора чисел.
7. На доске написаны числа $1, 2, \dots, 1000$. Разрешается стереть любые два числа a и b и записать вместо них числа ab и $a^2 + b^2$. Можно ли такими операциями добиться, чтобы среди чисел, написанных на доске, было хотя бы 700 одинаковых?
8. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладёт камень, и числа камней в куче, из которой он берёт камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?