Группа 6-1

Преобразования

1. Известно, что число x целое, а число x^2-81 — простое. Найдите наибольшее значение x.

2. Сумма двух чисел равна 3, а сумма их обратных величин равна 2. Чему равна сумма квадратов этих чисел?

3. Говорят, что последовательность a, b, c является арифметической прогрессией, если $c - b = b - a$. Саша написал на доске последовательность x, y, z. Илья посчитал, на какое положительное число ему надо изменить (увеличить или уменьшить) y, чтобы полученная последовательность была арифметической прогрессией, а Анжелика — на какое положительное число надо для этого изменить z. Докажите, что число Анжелики в два раза больше числа Ильи.

4. Число a таково, что $1 + a = a^2$. Найдите значение выражения $a^4 - 3a$.

5. Если у прямоугольника ширину увеличить на 3 см, а длину уменьшить на 3 см, его площадь не изменится. А как изменится площадь, если вместо этого у исходного прямоугольника ширину уменьшить на 4 см, а длину увеличить на 4 см?

6. Петр Васильевич и Василиса Петровна женаты, и у них двое детей. Сегодня Петр Васильевич заметил, что два года назад его возраст отличался от произведения возрастов его детей на возраст жены. А Василиса Петровна заметила, что через два года это тоже будет верно. На сколько отличается возраст Петра Васильевича от произведения возрастов его детей сегодня? (Возраст они измеряли натуральным числом лет.)

7. Произведение трёх чисел равно 1, а их сумма равна сумме обратных к ним чисел. Докажите, что одно из чисел равно 1.

Упорядочивания

1. На доске написаны 2022 числа. Оказалось, что сумма любых двух написанных на доске чисел также написана на доске. Какое наибольшее количество ненулевых чисел может быть написано?

2. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

3. Докажите, что цифры любого шестизначного числа можно переставить так, что сумма первых трех будет отличаться от суммы остальных не более, чем на 9.

4. На прямой дано $2n + 1$ отрезоков. Известно, что каждый пересекается не менее, чем с n из оставшихся. Докажите, что найдется отрезок, который пересекается со всеми.

5. В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причём в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

6. На дискотеке n юношей танцевали с n девушками. В каждой паре юноша был выше девушки, но не более, чем на 10 см. Докажите, что если поставить танцевать самого высокого юношу с самой высокой девушкой, второго по росту — со второй, и т. д., то по прежнему в каждой паре юноша будет выше девушки и опять же не более, чем на 10 см.

7. На плоскости отмечено n точек. Докажите, что среди середин всевозможных отрезков с концами в этих точках не менее $2n - 3$ различных точек.

8. **(а)** Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

(б) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

9. Пусть каждое из $2n$ различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ не превосходит n^2 $(n > 2)$. Докажите, что среди попарных разностей найдутся хотя бы три равные.

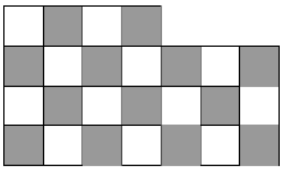
[Лицей «Вторая школа»] Добряков А. Д.
[*ЛМШ-2022*] группа: 6-1 *6 июля 2022 г.*

Геометрический разнобой

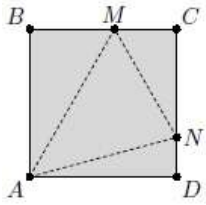
1. Разрежьте по клеточкам квадрат 7×7 на девять прямоугольников (не обязательно различных), из которых можно будет сложить любой прямоугольник со сторонами, не превосходящими 7.

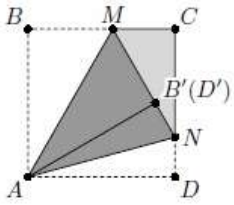
2. Мальвина велела Буратино разрезать квадрат на 7 прямоугольников (необязательно различных), у каждого из которых одна сторона в два раза больше другой. Выполнимо ли это задание?

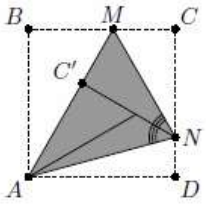
3. У бабушки была клетчатая тряпочка (см. рисунок ниже). Однажды она захотела сшить из неё подстилку коту в виде квадрата размером 5×5. Бабушка разрезала тряпочку на три части и сшила из них квадратный коврик, также раскрашенный в шахматном порядке. Покажите, как она могла это сделать (у тряпочки одна сторона – лицевая, а другая – изнаночная, то есть части можно поворачивать, но нельзя переворачивать).

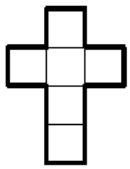


4. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник (см. рисунки ниже). Найдите отмеченный угол.





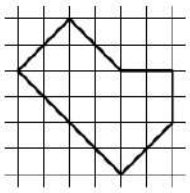




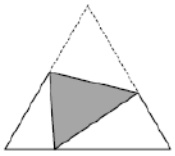
5. Петя склеил бумажный кубик и записал на его гранях числа от 1 до 6 так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях были одинаковыми. Вася хочет разрезать этот кубик так, чтобы получить развёртку, показанную на рисунке выше. При этом Вася старается, чтобы суммы чисел по горизонтали и по вертикали в этой развёртке отличались как можно меньше. Какая самая маленькая положительная разность может у него получиться, независимо от того, каким образом расставлял числа Петя?

6. Разрежьте фигуру на рисунке на три равные части (не обязательно по линиям сетки). (Равными называются части, которые можно совместить,

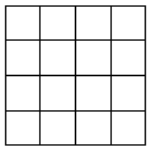
наложив друг на друга. При этом части можно поворачивать и переворачивать.)



7. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (см. рисунок ниже). Докажите, что углы двух белых треугольников соответственно равны.



8. Есть 40 одинаковых шнуров. Если поджечь любой шнур с одной стороны, он сгорает, а если с другой – не горит. Вася раскладывает шнуры в виде квадрата (см. рисунок, каждый шнур – сторона клетки). Затем Петя расставляет 12 запалов. Сможет ли Вася разложить шнуры так, что Пете не удастся сжечь все шнуры?



9. Петя вырезал из пластмассы неравносторонний треугольник. Покажите, каким образом можно, пользуясь только этим инструментом как шаблоном, построить биссектрису какого-нибудь угла треугольника, равного вырезанному.

10. Квадрат разрезали на двенадцать прямоугольных треугольников. Могут ли десять из них оказаться равными друг другу, а два оставшихся – отличаться и от них, и друг от друга?

11. Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте квадрат наименьшего возможного размера.

[Лицей «Вторая школа»] Добряков А. Д.
[*ЛМШ-2022*] группа: 6-1 *7 июля 2022 г.*

Делимость

1. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его половина есть пятая степень некоторого целого числа, а пятая часть есть квадрат некоторого целого числа.

2. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

3. Существует ли такой набор из 10 натуральных чисел, что каждое не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого делится на каждое из остальных?

4. Если не заметить знак умножения между двумя трёхзначными числами, то получится одно шестизначное число, которое окажется в семь раз больше произведения. Найдите эти числа.

5. Решите ребус: СУК×СУК=БАРСУК.

6. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором – 1?

7. Может ли сумма 2015 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 2019 чисел?

8. У натурального числа N выписали все его делители, затем у каждого из этих делителей подсчитали сумму цифр. Оказалось, что среди этих сумм нашлись все числа от 1 до 9. Найдите наименьшее значение N.

9. Имеется дробь $\frac{1}{n}$. Шестиклассник каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и проверяет, сократима ли она. Он утверждает, что **первый раз** сократимая дробь получилась через 1000 минут. Стоит ли верить шестикласснику?

10. Если стереть любую цифру некокоторого натурального числа, то оставшееся число разделится на 7. Докажите, что либо в записи числа нет троек, либо все его цифры – тройки.

Графы 1. Деревья

1. **(a)** Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина.
(b) Докажите, что в любом дереве есть две висячих вершины.
(c) В любом ли дереве есть три висячих вершины?

2. В графе все вершины имеют степень пять. Докажите, что в нём есть цикл.

3. *Простой путь* – путь между двумя вершинами графа, ровно один раз проходящий по некоторым его вершинам.
(a) Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путем.
(b) Докажите, что граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.

4. *Расстоянием* между вершинами дерева назовём длину в рёбрах простого пути между ними.
(a) Расстояние между некоторыми вершинами A и B дерева равно 11. Рассмотрим вершину C. Пусть расстояние от C до A равно 7. Чему может быть равно расстояние до C до B?
(b) Чему может быть равна разность расстояний от C до A и до B?

5. Пусть Гамма – связный граф, состоящий из n вершин.
(a) Докажите, что в Гамма хотя бы $n-1$ ребро.
(b) Докажите, что если в Гамма ровно $n-1$ ребро, то Гамма является деревом.
(c) Докажите, что если в Гамма больше $n-1$ ребра, то Гамма уже не дерево.

6. В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой?

7. **(a)** Докажите, что вершины любого дерева удастся покрасить в два цвета так, чтобы никакие вершины одного цвета не были соединены ребром.
(b) В каждой вершине дерева записали сумму длин идущих из неё рёбер. Докажите, что вершины удастся разбить на две группы с равной суммой записанных чисел.

8. В компании из 101 человека существует строгая иерархия (нижестоящие подчиняются вышестоящим). Для участия в совещании было решено выбрать несколько работников, ни один из которых не подчиняется другому. Докажите, что в совещании гарантированно смогут поучаствовать 51 человек.

Графы 1. Деревья

1. **(a)** Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина.
(b) Докажите, что в любом дереве есть две висячих вершины.
(c) В любом ли дереве есть три висячих вершины?

2. В графе все вершины имеют степень пять. Докажите, что в нём есть цикл.

3. *Простой путь* – путь между двумя вершинами графа, ровно один раз проходящий по некоторым его вершинам.
(a) Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путем.
(b) Докажите, что граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.

4. *Расстоянием* между вершинами дерева назовём длину в рёбрах простого пути между ними.
(a) Расстояние между некоторыми вершинами A и B дерева равно 11. Рассмотрим вершину C. Пусть расстояние от C до A равно 7. Чему может быть равно расстояние до C до B?
(b) Чему может быть равна разность расстояний от C до A и до B?

5. Пусть Гамма – связный граф, состоящий из n вершин.
(a) Докажите, что в Гамма хотя бы $n-1$ ребро.
(b) Докажите, что если в Гамма ровно $n-1$ ребро, то Гамма является деревом.
(c) Докажите, что если в Гамма больше $n-1$ ребра, то Гамма уже не дерево.

6. В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой?

7. **(a)** Докажите, что вершины любого дерева удастся покрасить в два цвета так, чтобы никакие вершины одного цвета не были соединены ребром.
(b) В каждой вершине дерева записали сумму длин идущих из неё рёбер. Докажите, что вершины удастся разбить на две группы с равной суммой записанных чисел.

8. В компании из 101 человека существует строгая иерархия (нижестоящие подчиняются вышестоящим). Для участия в совещании было решено выбрать несколько работников, ни один из которых не подчиняется другому. Докажите, что в совещании гарантированно смогут поучаствовать 51 человек.

Десятичная запись

1. Последняя цифра в записи натурального числа в 2022 раза меньше самого числа. Найдите все такие числа.

2. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 9 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

3. Решите ребус: $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2025$.

4. Докажите, что произведение цифр числа, большего 9, меньше него самого.

5. Петя задумал 4 ненулевые цифры. Он составил из них два четырехзначных числа: самое большое и самое маленькое из возможных. Сумма получившихся чисел оказалась равна 11990. Что за цифры задумал Петя?

6. Найдите все двузначные числа, квадрат которых равен кубу суммы их цифр.

7. Если к двузначному числу a приписать справа двузначное число b, то полученное число будет в 3 раза больше произведения чисел a и b. Найдите эти числа.

8. **(a)** Покажите, что $S(x + y) = S(x) + S(y) - 9p$, где $S(x)$ — сумма цифр числа x, p — число переходов через десяток при сложении чисел x и y в столбик.

(b) Натуральные числа A и B отличаются перестановкой цифр. Докажите, что сумма цифр $2A$ равна сумме цифр $2B$.

(c) В десятичной записи четного числа n участвуют только цифры 0, 2, 4, 5, 7 и 9, цифры могут повторяться. Известно, что сумма цифр числа $2n$ равняется 35, а сумма цифр числа $n/2$ равняется 29. Какие значения может принимать сумма цифр числа n? Укажите все возможные ответы.

Переменные

1. Целое число увеличили на 2, при этом его квадрат уменьшился на 2016. Каким число было в начале (до увеличения)?

2. Шехерезада стала учительницей математики и задала школьникам на дом 1001 задачу. За каждую решённую задачу она начисляла 2 балла, за каждую неправильно решённую задачу штрафовала на один балл, а за каждую задачу, которую школьник не решал, штрафовала на пятьдесят баллов. Шахрияр правильно решил меньше 900 задач и набрал 1514 баллов. Сколько задач правильно решил Шахрияр?

3. Может ли в равенстве
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$
одно из чисел x, y или z быть однозначным, другое – двузначным, третье – трёхзначным?

Переменная помогает решить задачу

4. Если у прямоугольника ширину увеличить на 3 см, а высоту уменьшить на 3 см, его площадь не изменится. А как изменится площадь, если вместо этого у исходного прямоугольника ширину уменьшить на 4 см, а высоту увеличить на 4 см?

5. В турнире Солнечного города по шахматам каждый из 100 участников сыграл с каждым ровно по одному разу («турнир в один круг»). После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за победу действительно давалось 1 очко, но за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение – не 0 очков, а -1. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

6. Фигура (см рисунок) составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если известно, что сторона самого маленького квадрата равна 1.

7. Юра начертил на клетчатой бумаге прямоугольник (по клеточкам) и нарисовал на нем картину. После этого он нарисовал вокруг этого прямоугольника рамку шириной в две клетки.

   а) Чему равна площадь рамки, если прямоугольник имел размеры $a \times b$?

   б) Какие размеры могла иметь рамка, если площадь картины оказалась вдвое меньше площади рамки?

Дополнительные задачи

8. Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?

9. В некоторой игре имеются три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель». Известно, что целителей (т. е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в k раз меньше, чем воинов (k – целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что игроков, имеющих двойной класс, на 2 больше, чем целителей?

Простые и составные числа

1. Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

2. В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменок соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки — произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья — 5, Сол — 12, Джессика — 24, Акийо — 54, Михо — 64, Петра — 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

3. Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

4. Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

5. Числа от 1 до 12 разбили на 2 группы так, что произведение чисел в одной из них делится на другое. Чему равно наименьшее отношение этих произведений?

6. На сколько нулей оканчивается 200! ?

7. Определите, на какую наибольшую степень числа 2007 делится 2007!

8. Дима пытается расположить по кругу 123 натуральных числа так, чтобы для любых двух соседних чисел результат деления большего на меньшее был простым числом. Возможно ли это для какого-то набора чисел?

9. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого – квадрат, треть – куб, а пятая часть – пятая степень.

10. Можно ли придумать пять натуральных чисел, каждое из которых не делится ни на одно из остальных, но при этом квадрат каждого делится на любое из них?

Добавка

11. Два игрока по очереди выписывают делители натурального числа N. При этом нельзя повторять те числа, которые уже выписывали ранее, и каждое выписанное число должно быть взаимно просто с числом, которое только что выписал соперник. Кто выигрывает при правильной игре?

12. Назовём натуральное число забавным, если все его простые делители меньше, чем 20. Докажите, что среди любых 300 забавных чисел найдутся два таких, что их произведение – полный квадрат.

13. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Вася — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?

Игры. Симметрия и дополнение

В задаче хотят узнать, кто победит при правильной игре, если иного не сказано. Петя всегда ходит первым.

1. **(a)** В ряд лежат 25 мандаринов. Петя и Вася едят по очереди один или два изначально соседних мандарина, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
(b) Та же задача, но мандарины лежат по кругу.

2. В кучке лежит 50 камней. Петя и Вася играют в игру: за ход можно взять **(a)** от 1 до 4 камней из кучи себе. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре? **(b)** Та же задача, но можно брать 2, 3, 5 или 6 камней.

3. На окружности расставлено 20 точек. Петя и Вася играют в игру: за ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим предыдущие отрезки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

4. В левом нижнем углу доски 9×9 стоит ферзь. Петя и Вася ходят им по очереди, начинает Петя. Запрещено ставить ферзя на поле, на котором он уже побывал. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. Из проволоки сделана модель одиннадцатиугольника, из одной вершины которого проведены все диагонали. Петя и Вася по очереди перекусывают по одной проволочке. **(a)** Проигрывает **(b)** Выигрывает тот, после хода которого модель впервые распадается на две части.

6. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 1001. За один ход разрешается стирать любое число; или два числа вместе с их средним арифметическим (только если оно целое). Петя и Вася делают ходы по очереди, проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход.

7. У Паши и Бори есть 3022 ореха. Они по очереди съедают несколько орехов, причём каждый может съесть на один орех меньше или на один орех больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Паша (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бори осталось 2022 или 1022 ореха. Может ли Паша победить?

8.* Петя и Вася играют в следующую игру: они по очереди ставят по одному значку (первый – крестики, второй – нолики) на первоначально пустое поле, состоящее из $2n$ ячеек (n – произвольное натуральное число), соединенных в кольцо . Если по окончании игры найдутся три одинаковых значка, расположенных подряд, выигрывает Петя, в противном случае – Вася.

[Летняя школа Л2Ш] О. Мухаметов
[*июль 2022 г.*] группа: 6-1 *11 июля 2022 г.*

Игры. Симметрия и дополнение

В задаче хотят узнать, кто победит при правильной игре, если иного не сказано. Петя всегда ходит первым.

1. **(a)** В ряд лежат 25 мандаринов. Петя и Вася едят по очереди один или два изначально соседних мандарина, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
(b) Та же задача, но мандарины лежат по кругу.

2. В кучке лежит 50 камней. Петя и Вася играют в игру: за ход можно взять **(a)** от 1 до 4 камней из кучи себе. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре? **(b)** Та же задача, но можно брать 2, 3, 5 или 6 камней.

3. На окружности расставлено 20 точек. Петя и Вася играют в игру: за ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим предыдущие отрезки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

4. В левом нижнем углу доски 9×9 стоит ферзь. Петя и Вася ходят им по очереди, начинает Петя. Запрещено ставить ферзя на поле, на котором он уже побывал. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. Из проволоки сделана модель одиннадцатиугольника, из одной вершины которого проведены все диагонали. Петя и Вася по очереди перекусывают по одной проволочке. **(a)** Проигрывает **(b)** Выигрывает тот, после хода которого модель впервые распадается на две части.

6. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 1001. За один ход разрешается стирать любое число; или два числа вместе с их средним арифметическим (только если оно целое). Петя и Вася делают ходы по очереди, проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход.

7. У Паши и Бори есть 3022 ореха. Они по очереди съедают несколько орехов, причём каждый может съесть на один орех меньше или на один орех больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Паша (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бори осталось 2022 или 1022 ореха. Может ли Паша победить?

8.* Петя и Вася играют в следующую игру: они по очереди ставят по одному значку (первый – крестики, второй – нолики) на первоначально пустое поле, состоящее из $2n$ ячеек (n – произвольное натуральное число), соединенных в кольцо . Если по окончании игры найдутся три одинаковых значка, расположенных подряд, выигрывает Петя, в противном случае – Вася.

НОД и немного НОК

1. Найдите НОД(1000!, 2017^{2022}).
2. Маша нашла НОК всех чисел от 1 до 1000, а Наташа – от 501 до 999. У кого получилось больше и во сколько раз?
3. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 600$?
4. Придумайте четыре числа так, чтобы любые три из них имели общий делитель, а все четыре в совокупности были бы взаимно просты.
5. Начертите квадрат и проведите в нем две диагонали. Затем расставьте в его вершинах и центре пять чисел так, чтобы любые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, а любые два, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.
6. Про натуральное число n известно, что НОД$(1000, n) = 4$ и НОД$(1000, n + 1) = 5$. Чему равен $(1000, n + 2)$?
7. Пусть натуральное число n таково, что $(n, n + 1) < (n, n + 2) < ... < (n, n + 35)$. Докажите, что $(n, n + 35) < (n, n + 36)$.
8. Найдите НОД всех 6-значных чисел, составленных из цифр 1,2,3,4,5,6 без повторений.
9. Даны шесть натуральных чисел. Для каждой пары чисел посчитали их НОД. Могут ли среди этих НОДов встречаться все натуральные числа от 1 до 15?
10. Катя выбрала 4 различных натуральных числа и для каждой пары чисел вычислила их НОД. У нее получились шесть различных чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N. Какое минимальное значение может принимать N?
11. Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение НОК(*, *, *) – НОК(*, *, *) = 2021 в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Грехова Д.Д.
[*июль 2022 г.*] группа: 6-1 *11 июля 2022 г.*

НОД и немного НОК

1. Найдите НОД(1000!, 2017^{2022}).
2. Маша нашла НОК всех чисел от 1 до 1000, а Наташа – от 501 до 999. У кого получилось больше и во сколько раз?
3. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 600$?
4. Придумайте четыре числа так, чтобы любые три из них имели общий делитель, а все четыре в совокупности были бы взаимно просты.
5. Начертите квадрат и проведите в нем две диагонали. Затем расставьте в его вершинах и центре пять чисел так, чтобы любые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, а любые два, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.
6. Про натуральное число n известно, что НОД$(1000, n) = 4$ и НОД$(1000, n + 1) = 5$. Чему равен $(1000, n + 2)$?
7. Пусть натуральное число n таково, что $(n, n + 1) < (n, n + 2) < ... < (n, n + 35)$. Докажите, что $(n, n + 35) < (n, n + 36)$.
8. Найдите НОД всех 6-значных чисел, составленных из цифр 1,2,3,4,5,6 без повторений.
9. Даны шесть натуральных чисел. Для каждой пары чисел посчитали их НОД. Могут ли среди этих НОДов встречаться все натуральные числа от 1 до 15?
10. Катя выбрала 4 различных натуральных числа и для каждой пары чисел вычислила их НОД. У нее получились шесть различных чисел: 1, 2, 3, 4, 5 и N. Какое минимальное значение может принимать N?
11. Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение НОК(*, *, *) – НОК(*, *, *) = 2021 в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

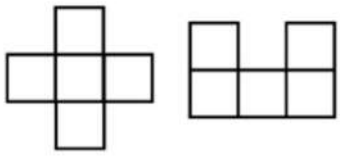
Постепенное конструирование

1. Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее на
(a) 6-м месте;
(b) 2022-м месте.

2. Фальшивомонетчик Вася напечатал купюры в 4 и 7 рублей. Докажите, что он может заплатить без сдачи любую сумму, начиная с 20 рублей.

3. Ханойская башня является одной из популярных головоломок XIX века. Даны три стержня, на один из которых нанизаны n колец, причём кольца отличаются размером и лежат меньшее на большем. Задача состоит в том, чтобы перенести пирамиду из n колец на другой стержень. За один раз разрешается переносить только одно кольцо, причём нельзя класть большее кольцо на меньшее. Решите эту головоломку для
(a) $n = 3$;
(b) $n = 5$;
(c) $n = 8$.

4. При каких n доску $15 \times n$ можно замостить фигурками из 5 клеток как на рисунке?



5. Как разложить 100 монет в 7 кошельков так, чтобы любое количество монет от 1 до 100 можно было бы выдать, не открывая кошельки?

6. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

7. Представьте число 1 в виде суммы
(a) трех;
(b) четырёх;
(c) десяти различных дробей с числителем 1.

8. Назовём куб неполноценным, если из него выкинули один произвольный кубик $1 \times 1 \times 1$. Докажите, что неполноценный куб $64 \times 64 \times 64$ можно разбить на неполноценные кубы $2 \times 2 \times 2$.

Графы 2. Двудольность

1. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. 17 из них любят играть в матбой, и в классе 15 парт. Сколько всего ребят в классе?

2. Каждый город Зазеркалья находится во владении либо Чёрного, либо Белого короля, причём дорог, соединяющих два города одного цвета, в стране нет. В ходе строительного бума на середине каждой дороги построили ещё по одному городу так, что она разделилась на две новых дороги. Докажите, что короли могут перераспределить свои владения (включая новые города) так, что дорог, соединяющих два города одного цвета, в Зазеркалье всё еще не будет.

3. Докажите, что если у всех вершин двудольного графа совпадают степени, то количества вершин в его долях тоже совпадают.

4. Можно ли на бесконечном клетчатом поле расставить 101 шахматного коня так, чтобы каждый бил ровно четырёх других?

5. В некоторой стране есть города и деревни, причём из городов идёт по 5 дорог только в деревни, а из деревень – по 3 дороги только в города (между любыми городом и деревней не более одной дороги). Путешественник объехал все населенные пункты страны, начав со столицы и закончив в деревне «Сватово». Докажите, что в каком-то населённом пункте путешественник побывал дважды.

6. Чётное количество городов Зазеркалья король распределил между Чёрным и Белым баронами и запретил строить дороги между городами одного цвета. Какое наибольшее количество дорог бароны могут при этом построить?

7. **(a)** Когда хоровод можно считать двудольным графом?
Критерий двудольности графа. **(b)** Докажите, что в любом двудольном графе все циклы имеют чётную длину. **(c)** Пусть в некотором графы все циклы имеют четную длину. Докажите, что это двудольный граф.

8. На плоскости дана 2021 точка. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причём один и тот же отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечётным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?

9. Маша записала в каждой вершине связного графа число. Потом пришла Юля, записала на каждом ребре сумму чисел в вершинах и стёрла числа Маши. Для каких графов Надежда Владимировна гарантированно сможет восстановить числа, написанные Машей?

[Летняя школа Л2Ш] О. Мухаметов
[*июль 2022 г.*] группа: 6-1 *12 июля 2022 г.*

Графы 2. Двудольность

1. В классе каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка – с пятью мальчиками. 17 из них любят играть в матбой, и в классе 15 парт. Сколько всего ребят в классе?

2. Каждый город Зазеркалья находится во владении либо Чёрного, либо Белого короля, причём дорог, соединяющих два города одного цвета, в стране нет. В ходе строительного бума на середине каждой дороги построили ещё по одному городу так, что она разделилась на две новых дороги. Докажите, что короли могут перераспределить свои владения (включая новые города) так, что дорог, соединяющих два города одного цвета, в Зазеркалье всё еще не будет.

3. Докажите, что если у всех вершин двудольного графа совпадают степени, то количества вершин в его долях тоже совпадают.

4. Можно ли на бесконечном клетчатом поле расставить 101 шахматного коня так, чтобы каждый бил ровно четырёх других?

5. В некоторой стране есть города и деревни, причём из городов идёт по 5 дорог только в деревни, а из деревень – по 3 дороги только в города (между любыми городом и деревней не более одной дороги). Путешественник объехал все населенные пункты страны, начав со столицы и закончив в деревне «Сватово». Докажите, что в каком-то населённом пункте путешественник побывал дважды.

6. Чётное количество городов Зазеркалья король распределил между Чёрным и Белым баронами и запретил строить дороги между городами одного цвета. Какое наибольшее количество дорог бароны могут при этом построить?

7. **(a)** Когда хоровод можно считать двудольным графом?
Критерий двудольности графа. **(b)** Докажите, что в любом двудольном графе все циклы имеют чётную длину. **(c)** Пусть в некотором графы все циклы имеют четную длину. Докажите, что это двудольный граф.

8. На плоскости дана 2021 точка. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причём один и тот же отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечётным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?

9. Маша записала в каждой вершине связного графа число. Потом пришла Юля, записала на каждом ребре сумму чисел в вершинах и стёрла числа Маши. Для каких графов Надежда Владимировна гарантированно сможет восстановить числа, написанные Машей?

Уравнения в целых числах

1. Решить в целых числах уравнения (a-f):
(a) $(x-2)(4y+x)=7$
(b) $(x-y)(x+y)=24$
(c) $7xy-4x^2=10$
(d) $2x^2+xy=x+7$
(e) $9x-15y=7$
(f) $xy-x-y=3$

2. Найдите хотя бы одно решение уравнения: $31x+28y+30z=365$.

3. Какое наименьшее положительное значение может принимать $x+y$, где x и y удовлетворяют уравнению $56x=65y$?

4. Докажите, что уравнение $3x^2=5y^2$ не имеет решений в натуральных числах.

5. Решите в натуральных числах уравнение: $x+\frac{1}{y+1/z}=\frac{10}{7}$.

Уравнения в цифрах

6. Двузначное число в 6 раз больше своей суммы цифр. Найдите это число.

7. Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок.

8. Решить в цифрах уравнение $\frac{1}{x+y+z}=\overline{0,xyz}$.

Окружность и круг

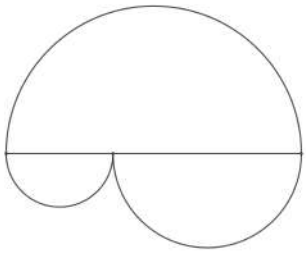
1. Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки:
(a) совпадают; **(b)** образуют прямой угол?

2. В маленьком городе только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На кольце есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка — через Зоопарк или не через Зоопарк — короче и во сколько раз?

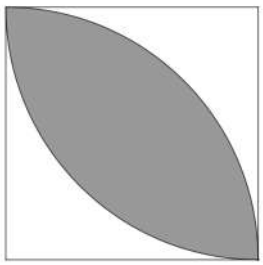
3. На какое наибольшее число кусков можно разделить круглый блинчик тремя прямолинейными разрезами?

4. В круге отметили точку. Разрежьте этот круг:
(a) на три части; **(b*)** на две части
и составьте из них новый круг, у которого отмеченная точка будет в центре.

5. Отрезок разделён точкой на два отрезка и построены три половины окружностей, диаметрами которых служат исходный отрезок и два полученных из него (см. рисунок). Докажите, что длина большей полуокружности равна сумме длин двух меньших полуокружностей.

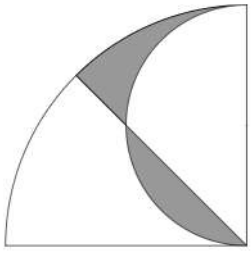


6. Две окружности, у которых центры — противоположные вершины квадрата со стороной 1, а радиусы равны 1, ограничивают закрашенную фигуру (см. рисунок). Найдите площадь этой фигуры.



7. Четверть круга разделили радиусом на две равные части и нарисовали в ней маленький полукруг (см. рисунок). Докажите, что площади закрашенных фигур равны.

8. Одна монета лежит неподвижно, а другая монета катится вокруг неё. Сколько раз подвижная монета обернётся вокруг своего центра, прежде чем вернётся в исходное положение, если:
(a) монеты одинаковые; **(b*)** радиус неподвижной монеты вдвое больше радиуса подвижной?



9.* **(a)** За круглым столом сидело несколько человек и перед ними стояли

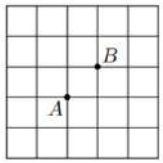
таблички с их именами. Затем таблички как-то переставили и каждый пошёл к своей табличке по часовой стрелке. Докажите, что общий пройденный ими путь равен целому числу полных оборотов вокруг стола.
(b) Двенадцать собеседников совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Докажите, что между ними найдутся два таких собеседника, между которыми (считая от первого ко второму в направлении по часовой стрелке) во второй раз окажется столько же собеседников, сколько и в первый.

10.* Можно ли бумажный круг с помощью ножниц перекроить в квадрат той же площади? Разрешается сделать конечное число прямых разрезов и разрезов по дугам окружностей.

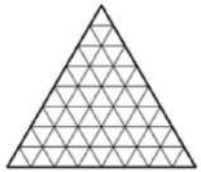
Оценка + пример на клеточках

1. На клетчатом поле 8×8 для морского боя находится невидимый корабль 1×3. Какое наименьшее количество выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить его?

2. Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрёстке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



3. Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1. Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?



4. Какое наименьшее количество доминошек можно разместить на доске 100×100 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце содержалась клетка хотя бы одной доминошки?

5. На какой наименьшей квадратной доске можно разместить комплект кораблей для игры в морской бой (один корабль 1×4, два корабля 1×3, три корабля 1×2 и четыре - 1×1)?

6. Квадрат 10×10 хотят покрыть квадратами 3×3 со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата. Каким наименьшим числом квадратов 3×3 можно обойтись?

7. На доске 8×8 требуется расставить крестики так, чтобы в каждом квадрате 3×3 было ровно три крестика. Какое

а) наименьшее

б) наибольшее количество крестиков может быть использовано?

8. В клетках доски 8×8 расставлены числа 1 и -1 (в каждой клетке — по одному числу). Рассмотрим всевозможные расположения четырёхклеточной фигурки в виде буквы Т на доске (фигурку можно поворачивать, но её клетки не должны выходить за пределы доски). Назовём такое расположение неудачным, если сумма чисел, стоящих в четырёх клетках фигурки, не равна 0. Найдите наименьшее возможное число неудачных расположений.

9. Каждая грань куба $6 \times 6 \times 6$ разбита на клетки 1×1. Куб оклеили квадратами 2×2 так, что каждый квадрат накрывает ровно четыре клетки, никакие квадраты не совпадают и каждая клетка накрыта одинаковым числом квадратов. Какое наибольшее значение может принимать это одинаковое число? (Квадрат можно перегибать через ребро.)

Делители

1. d_k - наибольший делитель числа n меньший n, d_1 - наименьший больший одного. Найдите все такие n, что: $d_1 \cdot d_2 + d_2 \cdot d_{k-1} = n$

2. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель в три раза больше самого маленького.

3. Число назовём хорошим, если оно меньше суммы трёх своих наибольших делителей, отличных от него самого (и при этом все эти делители у него имеются). Какое наименьшее положительное значение может принимать разность двух хороших чисел?

4. Найти все n такие что $n = d_1 + d_2 + d_{k-1} + d_k$. Где $1 < d_1 < d_2 < ...d_{k-1} < d_k < n$ все делители в порядке возрастания

5. d_k - наибольший делитель числа n меньший n, d_1 - наименьший больший одного. Найдите все такие n, что: $d_2 \cdot d_1 + d_1 \cdot d_{k-2} = n$

6. Серёжа выписал в ряд все натуральные делители некоторого натурального числа N в порядке возрастания. Оказалось, что для любых двух соседних чисел в этом ряду N делится и на разность этих чисел. Докажите, что для любых соседних чисел $a > b$ в этом ряду ab делится на $a - b$.

7. Назовём раскраску всех натуральных делителей натурального числа n не более чем в 4 цвета няшной, если для любых двух его делителей $a > b$ таких, что a не делится на b, делители a, b и НОД(a, b) покрашены в три разных цвета. Какое наибольшее количество няшных раскрасок может быть у числа, не являющегося степенью простого.

8. Дано натуральное число $n > 2$. Все его делители упорядочили по возрастанию: $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Докажите, что $d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1}d_k$ меньше n^2

Оценка + пример (добавка)

1. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

2. Из десяти различных цифр составили два трёхзначных и одно четырёхзначное число. Эти три числа перемножили. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться произведение?

3. Выписали n чисел, идущих подряд. Оказалось, что ровно половина из них простые. Найдите все возможные n.

4. Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Грехова Д.Д.
[*июль 2022 г.*] группы: 6-1, 6-2 *14 июля 2022 г.*

Оценка + пример (добавка)

1. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

2. Из десяти различных цифр составили два трёхзначных и одно четырёхзначное число. Эти три числа перемножили. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться произведение?

3. Выписали n чисел, идущих подряд. Оказалось, что ровно половина из них простые. Найдите все возможные n.

4. Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

Цилиндр и шар

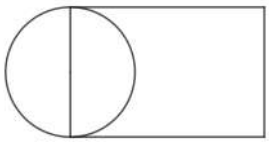
1. Расположите шесть одинаковых незаточенных круглых карандашей так, чтобы каждый карандаш касался всех остальных.

2. Что тяжелее: один шар радиуса 8 см или два шара радиусов 3 см и 5 см?

3. Радиус апельсина равен 4 см, а толщина кожуры равна 1 см. Объём какой части больше: съедобной или несъедобной?

4. Можно ли так расположить в пространстве шары, чтобы каждый касался всех остальных, используя:

(a) 4 шара; **(b)** 5 шаров?



5. Можно ли одной и той же пробкой специальной формы заткнуть отверстия:

(a) двух видов: круглое и прямоугольное;

(b) трёх видов: треугольное, квадратное и круглое?

Сравнительные размеры фигур приведены на рисунках.

6. Из Москвы вылетел вертолёт, который пролетел 300 км на юг, затем — 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее её или на той же широте? Оказался ли он западнее Москвы, восточнее её или на той же долготе?

7. В пустой аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, налили воды и положили на дно одинаковые стеклянные шарики. Если вынуть половину всех шариков, то уровень воды в аквариуме понизится на одну треть. На какую часть (от нового уровня) понизится уровень воды, если вынуть половину оставшихся шариков?

8. Два разных цилиндра имеют боковую поверхность, равную 100 см^2, а высота каждого цилиндра меньше 10 см. Докажите, что можно вырезать из бумаги параллелограмм площадью 100 см^2, которым можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндров.

9. Умелая хозяйка использует для раскатки теста цилиндрическую скалку, радиус основания которой равен 2 см, а общая длина — 35 см. Для того, чтобы к скалке не прилипало тесто, её покрывают мукой. На фигуру какой площади хватит муки с одной скалки?

10.* Моток ниток проткнули 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрёл форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?

Остатки

1. Докажите, что число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится на 1004.

2. Докажите, что число
(a) $9^{2022} + 7^{2022}$ делится на 10;
(b) $5^{70} + 6^{70}$ делится на 61.

3. Делится ли
(a) $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 102 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 101$ на 103;
(b) $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99$ на 101;
(c) $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 104 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 103$ на 105.

4. Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n.

5. Докажите, что
(a) $p^2 - 1$ делится на 24, если p — простое число и $p > 3$;
(b) $p^2 - q^2$ делится на 24, если p и q — простые числа, большие 3.

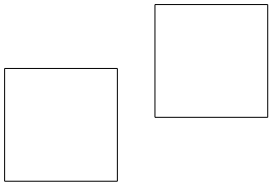
6. Докажите, что если $a^2 + b^2 = c^2$, то
(a) хотя бы одно из чисел a, b делится на 3;
(b) хотя бы одно из чисел a, b или c делится на 5;
(c) произведение abc делится на 60.

7. a и b — натуральные числа, причём число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится и на 441.

8. a, b, c — натуральные числа, причём $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

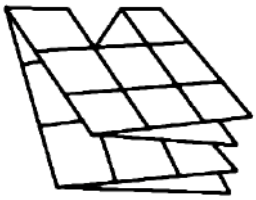
9. Квадрат некоторого целого числа оканчивается четыремя одинаковыми цифрами. Какими?

Симметрии

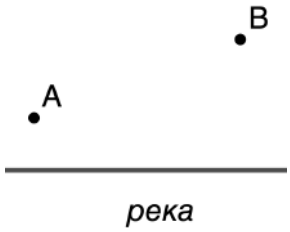


1. Как одним прямолинейным разрезом рассечь два квадратных блинчика на две равные части каждый?

2. Двое игроков по очереди кладут круглые монеты на прямоугольный стол на свободное от монет место. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

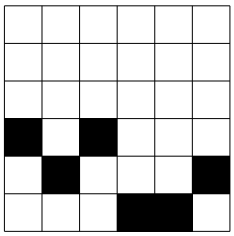


3. Квадратный лист размером 6×6 клеток сложили и вырезали из него часть согласно рисунку. Затем этот лист развернули. Нарисуйте развёрнутый лист размером 6×6 клеток и покажите на рисунке сделанные вырезы.



4. Туристы поставили две палатки, в точка A и B, неподалёку от берега реки. Туристы из одной палатки хотят навестить друзей из другой палатки и по дороге искупаться. Как им выбрать кратчайший путь?

5. Фигура симметрична относительно двух перпендикулярных прямых. Докажите, что она симметрична относительно точки их пересечения.



6. Квадрат 6×6 разделён на 36 маленьких квадратиков, и шесть из них закрашены согласно рисунку ниже. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. За какое наименьшее количество перегибаний можно закрасить весь квадрат?

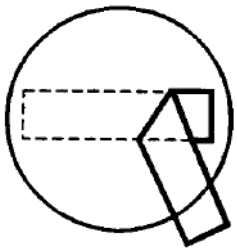
7. Разрежьте квадрат:

(a) на два равных пятиугольника; **(b)** на два равных шестиугольника.

8. Сложите из трёх равных составленных из клеток фигур без оси симметрии фигуру с осью симметрии.

9. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

10. Полоска бумаги прямоугольной формы такова, что её можно покрыть кругом радиуса 1. Полоску перегнули согласно рисунку. Докажите, что и теперь её можно покрыть кругом радиуса 1.



Что-то остается неизменным...

0. Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и небрежно помешивают. Затем зачёрпывают три ложки полученной смеси и переливают их обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

1. Одна костяшка домино покрывает две клетки шахматной доски. Сможете ли Вы покрыть костяшками все клетки, кроме двух противоположных (на одной диагонали). (Шахматная доска состоит из $8 \times 8 = 64$ клеток)

2. Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие части; проигрывает тот, кто не сможет сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?

3. В клетках квадратной таблицы $n \times n$ расставлены $+1$ и одна -1 во второй клетке слева в вехнем ряду. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что сколько бы мы не проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу, состоящую только из $+1$ для а) $n = 4$; б) $n = 5$.

4. Можно ли квадратную доску размером 10×10 замостить плитками размером 1×4?

5. На доске написано 99 чисел: $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/99$. Каждым ходом Петя стирает любые два числа и записывает вместо них отношение их произведения к сумме. Докажите, что последнее число на доске не зависит от порядка стирания и найдите это число.

6. Из книги вырвали 25 страниц. Может ли сумма 50 чисел, являющихся номерами (с двух сторон) этих страниц, быть равной 2021?

7. Имеется два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом – 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?

8.* Сегодня в 12 часов дня был прилив. Когда он будет (там же) завтра? *Напоминание-подсказка: Приливы объясняются притяжением Луны: грубо говоря, на поверхности Земли под влиянием этого притяжения образуются два горба (один направлен в сторону Луны, а другой в противоположную сторону). За сколько дней Луна совершает полный оборот вокруг Земли?*

Делители-2

1. Известно, что у числа 1555848 ровно 100 делителей. Чему равно произведение этих делителей?

2. Сколько делителей у чисел $24, 1001, 2^4 3^2 11$?

3. Докажите, что у числа $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}$, (где $p_1, p_2, ..., p_n$ – различные простые числа) ровно $(a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_n + 1)$ делителей.

4. У числа n^2 ровно 99 делителей. Сколько может быть делителей у числа n?

5. У скольких натуральных чисел, не превосходящих 300, ровно 9 делителей? Натуральное число делится на 13, но не делится на 169. Докажите, что сумма всех его делителей делится на 7.

6. Найдите все натуральные числа, делящиеся на 21, у которых ровно 21 делитель.

7. У натурального числа ровно 101 делитель. Докажите, что в нем хотя бы 31 цифра.

Много-мало

1. Может ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?

2. Площадь прямоугольника меньше 1 дм^2. Может ли его периметр быть больше 1 км?

3. На занятии Платон, Юля и Саша решили все задачи. Может ли оказаться, что Саша большинство задач решил раньше Юли, Юля — большинство раньше Платона, а Платон — большинство раньше Саши?

4. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов с суммой периметров 100?

5. На выпускном вечере было юношей и девушек поровну. В конце вечера оказалось, что было 10 танцев и каждый раз танцевали все.

(a) Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

(b) Как могло получиться, что в дополнение к тому в каждом танце (начиная со второго) был юноша, который танцевал и с более красивой, и с более умной девушкой?

6. Раз в месяц директор Яндекса предлагает трем своим заместителям проголосовать за новый список своей и их зарплат. Сам директор не голосует. Те заместители, чью зарплату предлагается увеличить, голосуют за, остальные — против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли директор за год добиться, чтобы его зарплата вдесятеро увеличилась, а зарплаты всех заместителей вдесятеро уменьшились?

7. В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков.«Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

Много-мало

1. Может ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?

2. Площадь прямоугольника меньше 1 дм^2. Может ли его периметр быть больше 1 км?

3. На занятии Платон, Юля и Саша решили все задачи. Может ли оказаться, что Саша большинство задач решил раньше Юли, Юля — большинство раньше Платона, а Платон — большинство раньше Саши?

4. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов с суммой периметров 100?

5. На выпускном вечере было юношей и девушек поровну. В конце вечера оказалось, что было 10 танцев и каждый раз танцевали все.

(a) Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

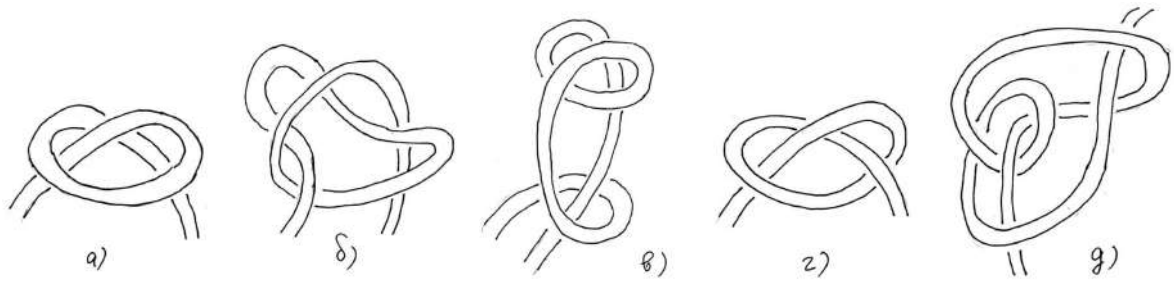
(b) Как могло получиться, что в дополнение к тому в каждом танце (начиная со второго) был юноша, который танцевал и с более красивой, и с более умной девушкой?

6. Раз в месяц директор Яндекса предлагает трем своим заместителям проголосовать за новый список своей и их зарплат. Сам директор не голосует. Те заместители, чью зарплату предлагается увеличить, голосуют за, остальные — против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли директор за год добиться, чтобы его зарплата вдесятеро увеличилась, а зарплаты всех заместителей вдесятеро уменьшились?

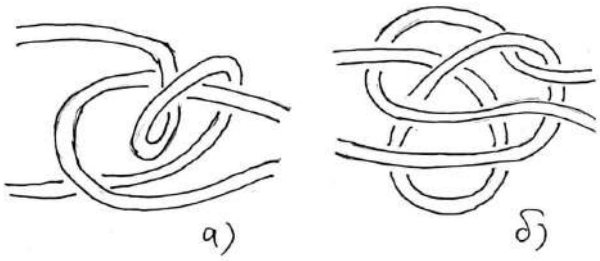
7. В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков.«Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

Конструкции. Добавка

1. (a) Кусок верёвки лежит на столе согласно рисунку. Завяжется ли узел, если потянуть за концы?



(b) Два куска верёвки лежат на столе согласно рисунку. Зацепятся ли они, если потянуть одной рукой за концы первой верёвки и другой рукой — за концы второй верёвки?



2. Концы верёвки соединены. Можно ли повесить её на два гвоздя так, чтобы она не падала, если за неё потянуть? А можно ли сделать так, чтобы при вытаскивании любого гвоздя верёвка упала?

3. Можно ли соединить (a) 3 резиновых кольца; (b*) 5 резиновых колец так, чтобы их нельзя было расцепить, но при разрезании любого из них они бы расцеплялись?

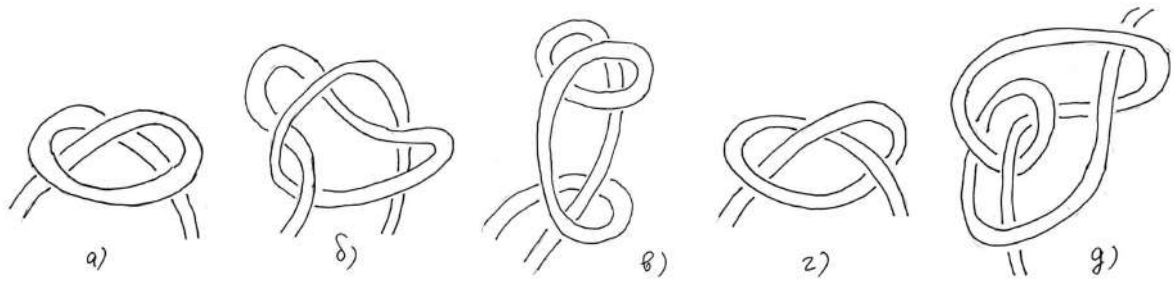
4. *Вам понадобятся бумага и ножницы.* Склейте из полоски бумаги ленту Мёбиуса.

(a) Разрежьте лист Мёбиуса по «средней» линии, равноудалённой от его краёв. Сколько получится частей?

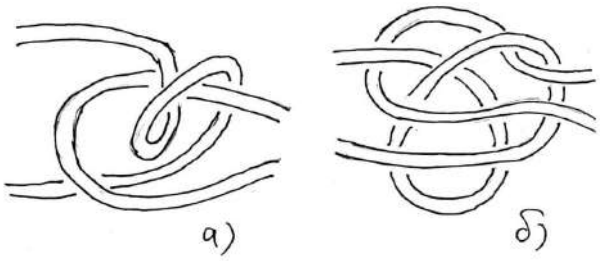
(b) Перед склеиванием листа Мёбиуса проведите на нём а) две линии; б) n линий параллельно краям. Разрежьте лист Мёбиуса по этим линиям. Сколько получится частей?

Конструкции. Добавка

1. (a) Кусок верёвки лежит на столе согласно рисунку. Завяжется ли узел, если потянуть за концы?



(b) Два куска верёвки лежат на столе согласно рисунку. Зацепятся ли они, если потянуть одной рукой за концы первой верёвки и другой рукой — за концы второй верёвки?



2. Концы верёвки соединены. Можно ли повесить её на два гвоздя так, чтобы она не падала, если за неё потянуть? А можно ли сделать так, чтобы при вытаскивании любого гвоздя верёвка упала?

3. Можно ли соединить (a) 3 резиновых кольца; (b*) 5 резиновых колец так, чтобы их нельзя было расцепить, но при разрезании любого из них они бы расцеплялись?

4. *Вам понадобятся бумага и ножницы.* Склейте из полоски бумаги ленту Мёбиуса.

(a) Разрежьте лист Мёбиуса по «средней» линии, равноудалённой от его краёв. Сколько получится частей?

(b) Перед склеиванием листа Мёбиуса проведите на нём а) две линии; б) n линий параллельно краям. Разрежьте лист Мёбиуса по этим линиям. Сколько получится частей?

Разнобой

1. 26 учеников пронумерованы в классном журнале числами от 1 до 26. Каждый из них заявил:«Каждый, у кого номер имеет с мои общий делитель, больший 1, иногда врёт». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

2. В классе организовали несколько кружков. В каждый кружок ходит ровно 9 учеников, а каждый ученик — ровно в 2 кружка. Оказалось, что для любых двух кружков есть ровно один ученик, который ходит в оба эти кружка. Сколько детей посещают кружки?

3. Митя и Андрей делили одно и то же число с остатком. Митя на 8, Андрей — на 9. Неполное частное, которое получил Митя, в сумме с остатком от деления, который получил Андрей, дали 13. Какой остаток при делении получился у Мити?

4. У каждого двузначного числа нашли произведение цифр, потом у каждого такого произведения подсчитали сумму цифр. Найдите наибольшее значение среди всех таких сумм.

5. Положительные числа a и b таковы, что сумма дробей

$$\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2022}{b+2022}$$

равна 2022. Найдите произведение этих дробей.

6. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых выполняется равенство НОК (a, b) — НОД $(a, b) = ab/5$.

7. Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них целая. Может ли произведение всех трех чисел быть целым числом?

8.* Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что

$$\text{НОД } (a, b) + \text{НОК } (a, b) = ab/2.$$

Разнобой

1. 26 учеников пронумерованы в классном журнале числами от 1 до 26. Каждый из них заявил:«Каждый, у кого номер имеет с мои общий делитель, больший 1, иногда врёт». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

2. В классе организовали несколько кружков. В каждый кружок ходит ровно 9 учеников, а каждый ученик — ровно в 2 кружка. Оказалось, что для любых двух кружков есть ровно один ученик, который ходит в оба эти кружка. Сколько детей посещают кружки?

3. Митя и Андрей делили одно и то же число с остатком. Митя на 8, Андрей — на 9. Неполное частное, которое получил Митя, в сумме с остатком от деления, который получил Андрей, дали 13. Какой остаток при делении получился у Мити?

4. У каждого двузначного числа нашли произведение цифр, потом у каждого такого произведения подсчитали сумму цифр. Найдите наибольшее значение среди всех таких сумм.

5. Положительные числа a и b таковы, что сумма дробей

$$\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2022}{b+2022}$$

равна 2022. Найдите произведение этих дробей.

6. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых выполняется равенство НОК (a, b) — НОД $(a, b) = ab/5$.

7. Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них целая. Может ли произведение всех трех чисел быть целым числом?

8.* Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что

$$\text{НОД } (a, b) + \text{НОК } (a, b) = ab/2.$$

Алгоритмы

1. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах найти одну фальшивую монету среди четырех, если неизвестно, легче она или тяжелее?

2. Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Как за 7 проверок найти оба радиоактивных шара?

3. Шейх разложил свои сокровища по девяти мешкам: в первый мешок 1 кг, во второй – 2 кг, в третий – 3 кг, и так далее, в девятый – 9 кг. Коварный визирь украл часть сокровищ из одного мешка. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь шейху определить, из какого именно?

4. В орфографическом словаре 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Лёша открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой странице. Витя хочет угадать это слово, задавая вопросы, на которые Лёша отвечает ”Да” или ”Нет”. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

5. Лёша загадывает клетку доски $N \times N$. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Лёши, попала ли в него загаданная клетка.
(a) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 8$?
(b) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 5$?

6. Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?

7. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$; **(c)** $k = 13$?

8. Имеются красный, синий, зелёный и чёрный шарики, среди которых могут быть волшебные. Детектор позволяет определить, сколько из помещённых в него шариков волшебны. Как узнать, какие шарики волшебные, а какие нет, всего за три измерения?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Седов Г. К.
[*июль 2022 г.*] группа: 6-1 *20.07.2022*

Алгоритмы

1. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах найти одну фальшивую монету среди четырех, если неизвестно, легче она или тяжелее?

2. Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Как за 7 проверок найти оба радиоактивных шара?

3. Шейх разложил свои сокровища по девяти мешкам: в первый мешок 1 кг, во второй – 2 кг, в третий – 3 кг, и так далее, в девятый – 9 кг. Коварный визирь украл часть сокровищ из одного мешка. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь шейху определить, из какого именно?

4. В орфографическом словаре 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Лёша открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой странице. Витя хочет угадать это слово, задавая вопросы, на которые Лёша отвечает ”Да” или ”Нет”. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

5. Лёша загадывает клетку доски $N \times N$. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Лёши, попала ли в него загаданная клетка.
(a) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 8$?
(b) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 5$?

6. Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?

7. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$; **(c)** $k = 13$?

8. Имеются красный, синий, зелёный и чёрный шарики, среди которых могут быть волшебные. Детектор позволяет определить, сколько из помещённых в него шариков волшебны. Как узнать, какие шарики волшебные, а какие нет, всего за три измерения?

Принцип Дирихле и делимость

1. Докажите, что

(a) среди любых 11 целых чисел найдутся два, оканчивающихся одной и той же цифрой;

(b) среди любых 8 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 7.

2. Маша задумала пять натуральных чисел и возвела их в квадраты. Юля утверждает, что среди этих квадратов найдутся такие два числа, что их разность делится на 9. Права ли она?

3. Даны 12 различных двузначных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать 2 числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

4. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из данных чисел делится на 5.

5. Даны 8 различных натуральных чисел, каждое из которых не больше 15. Докажите, что среди их попарных разностей найдутся три одинаковых.

Безобратие

- На бесконечном шоссе находятся полицейская машина (ездит со скоростью до 100 км/ч) и вор на угнанном мотоцикле (ездит со скоростью до 80 км/ч). Полицейские не знают, в каком месте шоссе находится вор. Как им действовать, чтобы наверняка догнать вора? (Вор не может съехать с шоссе или спрятаться).
- Лабиринтом называется клетчатый квадрат 10×10, некоторые пары соседних узлов в котором соединены отрезком - "стеной" таким образом, что переходя из клетки в соседнюю по стороне клетку и не проходя через стены, можно посетить все клетки квадрата. Границу квадрата будем также считать обнесенной стеной. В некоторой клетке некоторого лабиринта стоит робот. Он понимает 4 команды - Л, П, В, Н, по которым соответственно идет влево, вправо, вверх и вниз, а если перед ним "стена", то стоит на месте. Как написать программу для робота, выполняя которую он обойдет все клетки независимо от лабиринта и от своего начального положения?

1. Иван Царевич хочет выйти из круглой комнаты с шестью дверями, пять из которых заперты на ключ. За одну попытку он может проверить
(a) любые три двери **(b)** любые три двери, расположенные подряд,
и если одна из них не заперта, то он в неё выйдет. После каждой попытки Баба-Яга запирает дверь, которая была открыта, и отпирает одну из соседних дверей. Какую именно, Иван Царевич не знает. Как ему действовать, чтобы наверняка выйти из комнаты?

2. 100 включённых и 100 выключенных фонариков случайным образом разложены по двум коробкам. У каждого фонарика есть кнопка, нажатие которой выключает горящий фонарик и зажигает выключенный. Ваши глаза завязаны, и вы не можете видеть, горит ли фонарик. Но вы можете перекладывать фонарики из коробки в коробку и нажимать на них кнопки. Придумайте способ добиться того, чтобы горящих фонариков в коробках было поровну.

3. В пустыне построен квадратный загон. Ваша задача с помощью плана пустыни понять, находится ли лев в загоне. Вы проводите прямую на плане и ваш ассистент, посмотрев в бинокль в окно, говорит, по какую сторону от прямой прячется лев. Если вы провели прямую через льва, вам тоже сообщат. Какое минимальное количество вопросов вам потребуется, чтобы гарантированно понять, есть ли лев в загоне?

4. В одной из вершин куба ABCDEFGH сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют залпом, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трёх соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа.

5. На прямой расположено **(a)** 128 **(b)** 200 пронумерованных точек. Пропрыгавший мимо кузнечик как-то покрасил эти точки в три цвета. Жабка, которая не видит точек, хочет чтобы все они стали одного цвета. Она загадывает два номера и если точки разного цвета, то они перекрашиваются в третий возможный, а если одного, то такими и остаются. Сможет ли жабка выполнить свою мечту?

6. Под одним из 2022 напёрстков, расположенных в ряд, лежит шарик. За один раз вы можете перевернуть один напёрсток и посмотреть, под ним ли находится шарик. В каждом промежутке между переворачиваниями напёрсток хитрый напёрсточник перекатывает шарик под соседний напёрсток. Сможете ли вы гарантированно найти шарик?

7. На бесконечной доске находится невидимый король и N неуязвимых ладей (король не может съесть ладью). Если королю ставят пат, то он пропускает ход (ладьи об этом не знают). Если королю ставят мат, происходит Бум. При каком наименьшем N можно гарантированно сделать Бум (расположение короля неизвестно)?

Полуинвариант

- В квадрате 20 на 20 стоят 400 ненулевых чисел. Можно изменить знак у всех чисел, стоящих в одном столбце или в одной строке. Докажите, что за конечное число таких операций можно добиться того, что сумма чисел, стоящих в любой строке или в любом столбце, будет неотрицательной.
- По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

1. По окружности расставлены N натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записывают их наибольший общий делитель. После этого исходные числа стирают, а с оставшимися проделывают то же самое. Докажите, что через несколько шагов все числа станут равными.

2. У каждого члена парламента не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого его члена в одной с ним палате будет не более одного врага.

3. По кругу стоит 37 школьников. Каждый из них любит либо волейбол, либо футбол. Один раз в минуту все школьники одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый школьник, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

4. На плоскости расположены n красных и n синих точек, среди которых никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что можно нарисовать n отрезков с концами в этих точках так, чтобы каждый отрезок имел концы разных цветов и никакие два отрезка не пересекались.

5. Надежда Владимировна позвала на прогулку $2n$ шестиклассников. У каждого шестиклассника есть не более $n-1$ врага (вражда взаимна). Докажите, что на привале все шестиклассники смогут выстроиться в круг так, что никто не будет стоять рядом со своим врагом.

6. На участке 10 на 10 метров на девяти квадратных метрах из 100 выросла трава. Если у какого-то квадратного метра два или более соседей покрыты травой, то он через час тоже покроется травой. Может ли через некоторое время весь участок покрыться травой?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Седов Г. К.
[*июль 2022 г.*] группа: 6-1 *23.07.2022*

Полуинвариант

- В квадрате 20 на 20 стоят 400 ненулевых чисел. Можно изменить знак у всех чисел, стоящих в одном столбце или в одной строке. Докажите, что за конечное число таких операций можно добиться того, что сумма чисел, стоящих в любой строке или в любом столбце, будет неотрицательной.
- По кругу расположено 100 кучек конфет. Вася занят важным делом: если в какой-то куче конфет больше, чем в каждой из соседних, то Вася убирает из этой кучи одну конфету, а в обе соседние добавляет по конфете (у Васи есть бесконечно много конфет в запасе). Докажите, что через некоторое время Вася не сможет больше сделать ни одной такой операции.

1. По окружности расставлены N натуральных чисел. Между каждыми двумя соседними числами записывают их наибольший общий делитель. После этого исходные числа стирают, а с оставшимися проделывают то же самое. Докажите, что через несколько шагов все числа станут равными.

2. У каждого члена парламента не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого его члена в одной с ним палате будет не более одного врага.

3. По кругу стоит 37 школьников. Каждый из них любит либо волейбол, либо футбол. Один раз в минуту все школьники одновременно оглашают свои мнения. Сразу после этого каждый школьник, оба соседа которого думают иначе, чем он, меняет своё мнение, а остальные — не меняют. Докажите, что через некоторое время мнения перестанут меняться.

4. На плоскости расположены n красных и n синих точек, среди которых никакие три не лежат на одной прямой. Докажите, что можно нарисовать n отрезков с концами в этих точках так, чтобы каждый отрезок имел концы разных цветов и никакие два отрезка не пересекались.

5. Надежда Владимировна позвала на прогулку $2n$ шестиклассников. У каждого шестиклассника есть не более $n-1$ врага (вражда взаимна). Докажите, что на привале все шестиклассники смогут выстроиться в круг так, что никто не будет стоять рядом со своим врагом.

6. На участке 10 на 10 метров на девяти квадратных метрах из 100 выросла трава. Если у какого-то квадратного метра два или более соседей покрыты травой, то он через час тоже покроется травой. Может ли через некоторое время весь участок покрыться травой?

Группа 6-2

Преобразования

1. Известно, что число x целое, а число x^2-81 — простое. Найдите наибольшее значение x.

2. Сумма двух чисел равна 3, а сумма их обратных величин равна 2. Чему равна сумма квадратов этих чисел?

3. Говорят, что последовательность a, b, c является арифметической прогрессией, если $c-b=b-a$. Саша написал на доске последовательность x, y, z. Илья посчитал, на какое положительное число ему надо изменить (увеличить или уменьшить) y, чтобы полученная последовательность была арифметической прогрессией, а Анжелика — на какое положительное число надо для этого изменить z. Докажите, что число Анжелики в два раза больше числа Ильи.

4. Число a таково, что $1+a=a^2$. Найдите значение выражения a^4-3a.

5. Петр Васильевич и Василиса Петровна женаты, и у них двое детей. Сегодня Петр Васильевич заметил, что два года назад его возраст отличался от произведения возрастов его детей на возраст жены. А Василиса Петровна заметила, что через два года это тоже будет верно. На сколько отличается возраст Петра Васильевича от произведения возрастов его детей сегодня? (Возраст они измеряли натуральным числом лет.)

6. Произведение трёх чисел равно 1, а их сумма равна сумме обратных к ним чисел. Докажите, что одно из чисел равно 1.

7. На доске написаны четыре числа, но одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны.

Соответствия

1. У Маши и Даши есть мешок с конфетами 9 видов. К Новому году Маша составляет различные наборы, в каждом из которых 4 конфеты разного вида, а Даша — аналогичные наборы, но из 5 конфет. У какой из девочек получится составить больше наборов?

2. В зале 8 светильников. Сравните количество способов включить ровно 5 из них с количеством различных слов, которые можно получить из слова АХАХАХАА, переставляя в нем буквы.

3. Каких делителей у числа **(а)** 222222 **(б)** 444444 больше: четных или нечетных?

4. Докажите, что натуральное число является точным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечетное число натуральных делителей.

5. Каких способов больше: расселить пять друзей на ночь в трех комнатах (гостиной, спальне и на кухне) или раздать пять одинаковых карамелек трем детям?

6. **(а)** Меню школьной столовой постоянно и состоит из 11 блюд. Петя и Вася решили поспорить, кто из них дольше сможет питаться в школьной столовой. Условия спора следующие: Петя каждый день съедает четное число блюд (возможно, что и ни одного), а Вася — нечетное, причем каждый день необходимо съедать новый набор блюд. Кто из них победит в споре?

(б) А кто победит в споре, если блюд будет 10?

(в) Предположим, что одно из блюд в столовой — компот. Кто из них выпьет больше компотов за время спора в каждом из случаев?

7. Каких чисел больше среди всех чисел от 100 до 999: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?

8. При каком значении a количество решений уравнения $x + y + z + t = 10$ в целых неотрицательных числах равно количеству решений уравнения $x + y + z + t = a$ в натуральных числах?

9. Дана шахматная доска. Ее вертикали перенумерованы числами от 1 до 8, а горизонтали обозначены латинскими буквами от a до h. Рассматриваются покрытия доски доминошками, содержащими две соседние клетки. Каких разбиений больше — тех, которые содержат доминошку $a1$-$a2$, или тех, которые содержат доминошку $b2$-$b3$?

10. Докажите, что при любом натуральном n уравнения $x^2 + y^2 = n$ и $x^2 + y^2 = 2n$ имеют одинаковое количество решений в целых числах.

Преобразования плоскости - 1

1. Даны две точки A и B. Найти множество точек, каждая из которых является симметричным образом точки A относительно некоторой прямой, проходящей через точку B.

2. Отметьте на плоскости 6 точек так, чтобы от каждой на расстоянии 1 находилось ровно три точки.

3. В квадрате закрашена часть клеток, как показано на рисунке. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. Можно ли закрасить весь квадрат:

   а) за 5 или менее;

   б) за 4 или менее;

   в) за 3 или менее таких перегибания?

4. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник (см. рисунки). Найдите отмеченный угол.

Движение помогает решить задачу

5. Есть прямоугольный стол. Два игрока начинают по очереди класть на него по одному евро так, чтобы эти монеты не перекрывали друг друга. Кто не может сделать ход — проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

6. На шахматной доске 8×8 расставлено наибольшее возможное число слонов так, что никакие два слона не угрожают друг другу. Доказать, что число всех таких расстановок есть точный квадрат.

7. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

Дополнительные задачи

8. Существует ли шестиугольник, который можно разбить одной прямой на четыре равных треугольника?

9. Квадратная комната разгорожена перегородками на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты – целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.

10. Из картона вырезаны две одинаковые фигуры, которые положили с наложением (нахлёстом) на дно прямоугольного ящика. Дно оказалось полностью покрыто. В центр дна вбили гвоздь. Мог ли гвоздь проткнуть одну картонку и не проткнуть другую?

11. Сколько существует положений стрелок у обыкновенных стрелочных часов, по которым нельзя определить время, при условии что неизвестно, какая стрелка часовая, а какая —- минутная?

Вспоминаем графы

1. Существует ли граф с 2022 рёбрами, в котором степень каждой вершины равна 9, 18 или 36?

2. В компании друзей каждый пожал руку каждому. Только Тимур пожал руку не всем. Всего было 37 рукопожатий. Сколько рук пожал Тимур?

3. Можно ли все ребра и диагонали правильного 55-угольника раскрасить в 54 цвета так, чтобы ребра, выходящие из одной вершины, были разного цвета?

4. На чемпионат по теннису записались 20 человек. Некоторые участники уже сыграли между собой. Докажите, что найдутся двое участников, сыгравшие одинаковое количество матчей.

5. В графе все вершины имеют степень пять. Докажите, что в нём есть цикл.

6. На планете Контрастов живут только рыцари и лжецы, некоторые из них дружат между собой. Каждый из них утверждает, что среди его друзей чётное число лжецов. Докажите, что на планете Контрастов живёт чётное число лжецов.

7. **(a)** В одной далекой стране некоторые города связаны между собой авиалиниями. Из столицы выходит 201 авиалиния, из города Забытый – одна, а из всех остальных городов – по 100 авиалиний. Докажите, что от столицы можно добраться до Забытого (возможно, с пересадками).
(b) В России из Москвы и Петербурга выходит по 2021 дороге, из города Апатиты – всего одна, а из всех остальных городов по 100. Докажите, что путешественник не сможет проехать из Апатитов в Москву, по пути посетив Питер.

8. В связном графе степень каждой вершины четна. Одно ребро удалили (оставив вершины на его концах). Докажите, что граф остался связным.

9. Какое наименьшее количество рёбер должно быть в связном графе из 11 вершин? А в связном графе из n вершин? (n – произвольное натуральное число)

Простые и составные числа

1. Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

2. В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменок соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки — произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья — 5, Сол — 12, Джессика — 24, Акийо — 54, Михо — 64, Петра — 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

3. Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

4. Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

5. Числа от 1 до 12 разбили на 2 группы так, что произведение чисел в одной из них делится на другое. Чему равно наименьшее отношение этих произведений?

6. На сколько нулей оканчивается 200! ?

7. Определите, на какую наибольшую степень числа 2007 делится 2007!

8. Дима пытается расположить по кругу 123 натуральных числа так, чтобы для любых двух соседних чисел результат деления большего на меньшее был простым числом. Возможно ли это для какого-то набора чисел?

9. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого – квадрат, треть – куб, а пятая часть – пятая степень.

10. Можно ли придумать пять натуральных чисел, каждое из которых не делится ни на одно из остальных, но при этом квадрат каждого делится на любое из них?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Грехова Д.Д.
[*июль 2022 г.*] группа: 6-2 *07 июля 2022 г.*

Простые и составные числа

1. Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?

2. В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменок соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки — произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья — 5, Сол — 12, Джессика — 24, Акийо — 54, Михо — 64, Петра — 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

3. Натуральное число умножили последовательно на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

4. Компания из нескольких друзей вела переписку так, что каждое письмо получали все, кроме отправителя. Каждый написал одно и то же количество писем, в результате чего всеми вместе было получено 440 писем. Сколько человек могло быть в этой компании?

5. Числа от 1 до 12 разбили на 2 группы так, что произведение чисел в одной из них делится на другое. Чему равно наименьшее отношение этих произведений?

6. На сколько нулей оканчивается 200! ?

7. Определите, на какую наибольшую степень числа 2007 делится 2007!

8. Дима пытается расположить по кругу 123 натуральных числа так, чтобы для любых двух соседних чисел результат деления большего на меньшее был простым числом. Возможно ли это для какого-то набора чисел?

9. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого – квадрат, треть – куб, а пятая часть – пятая степень.

10. Можно ли придумать пять натуральных чисел, каждое из которых не делится ни на одно из остальных, но при этом квадрат каждого делится на любое из них?

Десятичная запись

1. Коля написал на доске трехзначное число. Митя последнюю цифру этого числа перенес в начало. Оказалось, что получившееся число на 216 меньше, чем число Коли. Какие числа написал каждый из мальчиков?

2. Последняя цифра в записи натурального числа в 2021 раз меньше самого числа. Найдите все такие числа.

3. Найдите все натуральные числа, которые увеличиваются в 7 раз, если между цифрой единиц и цифрой десятков вставить ноль.

4. Докажите, что произведение цифр числа, большего 9, меньше него самого.

5. Найдите наибольшее шестизначное число, у которого каждая цифра, начиная с третьей, равна сумме двух предыдущих цифр.

6. Если в трехзначном числе с различными ненулевыми цифрами сложить все возможные двузначные числа, образованные из цифр этого числа, то получится число вдвое больше исходного. Что это могло быть за число?

7. Частное при делении трехзначного числа на сумму его цифр — целое число.

(a) Может ли частное быть равным 34?

(b) Может ли частное быть равным 84?

Игры. Симметрия и дополнение

В задаче хотят узнать, кто победит при правильной игре, если иного не сказано. Петя всегда ходит первым.

1. **(a)** В ряд лежат 25 мандаринов. Петя и Вася едят по очереди один или два изначально соседних мандарина, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.
(b) Та же задача, но мандарины лежат по кругу.

2. В кучке лежит 50 камней. Петя и Вася играют в игру: за ход можно взять **(a)** от 1 до 4 камней из кучи себе. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре? **(b)** Та же задача, но можно брать 2, 3, 5 или 6 камней.

3. На окружности расставлено 20 точек. Петя и Вася играют в игру: за ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим предыдущие отрезки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

4. Из проволоки сделана модель одиннадцатиугольника, из одной вершины которого проведены все диагонали. Петя и Вася по очереди перекусывают по одной проволочке. Проигрывает тот, после хода которого модель впервые распадается на две части.

5. В левом нижнем углу шахматной доски стоит ферзь. Петя и Вася ходят им по очереди, начинает Петя. Запрещено ставить ферзя на поле, на котором он уже побывал. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

6. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 1000. За один ход разрешается стирать любое число; или два числа вместе с их средним арифметическим (только если оно целое). Петя и Вася делают ходы по очереди, проигравшим считается тот, кто не может сделать очередной ход.

7. Петя и Вася играют в следующую игру: они по очереди ставят по одному значку (первый – крестики, второй – нолики) на первоначально пустое поле, состоящее из 40 ячеек, соединенных в кольцо (n – произвольное натуральное число). Если по окончании игры найдутся три одинаковых значка, расположенных подряд, выигрывает Петя, в противном случае – Вася

8. На белой доске размером 4×20 Петя и Вася по очереди красят по одной клетке, причем никакие две закрашенные клетки не должны граничить между собой по вертикали, горизонтали или диагонали и никакую клетку нельзя красить второй раз. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход без нарушения правил.

[Лицей «Вторая школа»] Добряков А. Д.
[*ЛМШ-2022*] группа: 6-2 *8 июля 2022 г.*

Делимость

1. $(2 + a) \vdots 11$ и $(35 - b) \vdots 11$. Докажите, что $(a + b) \vdots 11$.

2. Известно, что $(14a + 13b) \vdots 11$. Докажите, что $(19a + 9b) \vdots 11$

3. Докажите, что число $\overline{ABABAB}$ делится на 37.

4. Известно, что $65a = 56b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

5. Найдите такое наименьшее натуральное число, что его половина есть пятая степень некоторого целого числа, а пятая часть есть квадрат некоторого целого числа.

6. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

7. Существует ли такой набор из 10 натуральных чисел, что каждое не делится ни на одно из остальных, а квадрат каждого делится на каждое из остальных?

8. Если не заметить знак умножения между двумя трёхзначными числами, то получится одно шестизначное число, которое окажется в семь раз больше произведения. Найдите эти числа.

9. Решите ребус: СУК×СУК=БАРСУК.

10. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором – 1?

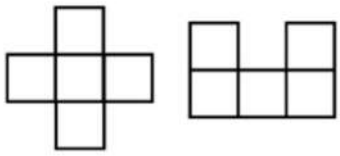
Постепенное конструирование

1. Найдите в последовательности 2, 6, 12, 20, 30, ... число, стоящее на
(a) 6-м месте;
(b) 2022-м месте.

2. Фальшивомонетчик Вася напечатал купюры в 4 и 7 рублей. Докажите, что он может заплатить без сдачи любую сумму, начиная с 20 рублей.

3. Ханойская башня является одной из популярных головоломок XIX века. Даны три стержня, на один из которых нанизаны n колец, причём кольца отличаются размером и лежат меньшее на большем. Задача состоит в том, чтобы перенести пирамиду из n колец на другой стержень. За один раз разрешается переносить только одно кольцо, причём нельзя класть большее кольцо на меньшее. Решите эту головоломку для
(a) $n = 3$;
(b) $n = 5$;
(c) $n = 8$.

4. При каких n доску $15 \times n$ можно замостить фигурками из 5 клеток как на рисунке?



5. Как разложить 100 монет в 7 кошельков так, чтобы любое количество монет от 1 до 100 можно было бы выдать, не открывая кошельки?

6. Маляр может за один ход перейти на соседнюю по стороне клетку шахматной доски, после этого он должен перекрасить ее в противоположный цвет. Маляр ставится на угловую клетку доски, где все клетки белые. Докажите, что он может покрасить доску в шахматном порядке.

7. **(a)** На плоскости нарисованы 6 различных прямых. Можно ли раскрасить получившиеся части плоскости в два цвета, чтобы области одного цвета не граничили по отрезку прямой?
(b) А если n прямых?

8. Представьте число 1 в виде суммы
(a) трех;
(b) четырёх;
(c) десяти различных дробей с числителем 1.

Упорядочивания

1. На доске написаны 2022 числа. Оказалось, что сумма любых двух написанных на доске чисел также написана на доске. Какое наибольшее количество ненулевых чисел может быть написано?

2. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

3. Докажите, что цифры любого шестизначного числа можно переставить так, что сумма первых трех будет отличаться от суммы остальных не более, чем на 9.

4. На прямой дано $2n + 1$ отрезоков. Известно, что каждый пересекается не менее, чем с n из оставшихся. Докажите, что найдется отрезок, который пересекается со всеми.

5. В 10 коробках лежат карандаши (пустых коробок нет). Известно, что в разных коробках разное число карандашей, причём в каждой коробке все карандаши разных цветов. Докажите, что из каждой коробки можно выбрать по карандашу так, что все они будут разных цветов.

6. На дискотеке n юношей танцевали с n девушками. В каждой паре юноша был выше девушки, но не более, чем на 10 см. Докажите, что если поставить танцевать самого высокого юношу с самой высокой девушкой, второго по росту — со второй, и т. д., то по прежнему в каждой паре юноша будет выше девушки и опять же не более, чем на 10 см.

7. На плоскости отмечено n точек. Докажите, что среди середин всевозможных отрезков с концами в этих точках не менее $2n - 3$ различных точек.

8. **(а)** Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

(б) Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более, чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза.

9. Пусть каждое из $2n$ различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ не превосходит n^2 $(n > 2)$. Докажите, что среди попарных разностей найдутся хотя бы три равные.

НОД и немного НОК

1. Найдите НОД$(1000!, 2017^{2022})$.
2. Маша нашла НОК всех чисел от 1 до 1000, а Наташа – от 501 до 999. У кого получилось больше и во сколько раз?
3. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?
4. В мешке у Деда Мороза находятся меньше ста подарков для Пети, Вася, Бори и Лёши. Дед Мороз отдал половину подарков Пете, пятую часть — Васе, седьмую часть — Боре. Сколько подарков досталось Лёше?
5. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 600$?
6. Придумайте четыре числа так, чтобы любые три из них имели общий делитель, а все четыре в совокупности были бы взаимно просты.
7. Начертите квадрат и проведите в нем две диагонали. Затем расставьте в его вершинах и центре пять чисел так, чтобы любые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, а любые два, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.
8. Про натуральное число n известно, что НОД$(1000, n) = 4$ и НОД$(1000, n + 1) = 5$. Чему равен $(1000, n + 2)$?
9. Пусть натуральное число n таково, что $(n, n + 1) < (n, n + 2) < ... < (n, n + 35)$. Докажите, что $(n, n + 35) < (n, n + 36)$.
10. Найдите НОД всех 6-значных чисел, составленных из цифр 1,2,3,4,5,6 без повторений.
11. Даны шесть натуральных чисел. Для каждой пары чисел посчитали их НОД. Могут ли среди этих НОДов встречаться все натуральные числа от 1 до 15?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Грехова Д.Д.
[*июль 2022 г.*] группа: 6-2 *11 июля 2022 г.*

НОД и немного НОК

1. Найдите НОД$(1000!, 2017^{2022})$.
2. Маша нашла НОК всех чисел от 1 до 1000, а Наташа – от 501 до 999. У кого получилось больше и во сколько раз?
3. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?
4. В мешке у Деда Мороза находятся меньше ста подарков для Пети, Вася, Бори и Лёши. Дед Мороз отдал половину подарков Пете, пятую часть — Васе, седьмую часть — Боре. Сколько подарков досталось Лёше?
5. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель чисел a и b, если известно, что $ab = 600$?
6. Придумайте четыре числа так, чтобы любые три из них имели общий делитель, а все четыре в совокупности были бы взаимно просты.
7. Начертите квадрат и проведите в нем две диагонали. Затем расставьте в его вершинах и центре пять чисел так, чтобы любые два числа, соединенные отрезком, имели общий делитель, а любые два, не соединенные отрезком, были бы взаимно просты.
8. Про натуральное число n известно, что НОД$(1000, n) = 4$ и НОД$(1000, n + 1) = 5$. Чему равен $(1000, n + 2)$?
9. Пусть натуральное число n таково, что $(n, n + 1) < (n, n + 2) < ... < (n, n + 35)$. Докажите, что $(n, n + 35) < (n, n + 36)$.
10. Найдите НОД всех 6-значных чисел, составленных из цифр 1,2,3,4,5,6 без повторений.
11. Даны шесть натуральных чисел. Для каждой пары чисел посчитали их НОД. Могут ли среди этих НОДов встречаться все натуральные числа от 1 до 15?

Графы 1. Деревья

1. **(a)** Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина.
(b) Докажите, что в любом дереве есть две висячих вершины. В любом ли дереве есть три висячих вершины?

2. Сколько рёбер может быть в дереве из n вершин?

3. Пусть Гамма – связный граф, состоящий из n вершин. Как мы помним, в Гамма хотя бы $n-1$ ребро. Докажите, что если в Гамма ровно $n-1$ ребро, то Гамма является деревом.

4. *Простой путь* – путь между двумя вершинами графа, ровно один раз проходящий по некоторым его вершинам.
(a) Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путем.
(b) Докажите, что граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.

5. *Расстоянием* между вершинами дерева назовём длину в рёбрах простого пути между ними.
(a) Расстояние между некоторыми вершинами A и B дерева равно 11. Рассмотрим вершину C. Пусть расстояние от C до A равно 7. Чему может быть равно расстояние до C до B?
(b) Чему может быть равна разность расстояний от C до A и до B?

6. **(a)** Докажите, что вершины любого дерева удастся покрасить в два цвета так, чтобы никакие вершины одного цвета не были соединены ребром.
(b) В каждой вершине дерева записали сумму длин идущих из неё рёбер. Докажите, что вершины удастся разбить на две группы с равной суммой записанных чисел.

7. В королевстве 101 рыцарь, некоторые рыцари являются вассалами других (вассал может иметь только одного сюзерена, причём сюзерен всегда богаче своего вассала). Для участия в сражении король решил выбрать нескольких рыцарей, ни один из которых не вассал другому. Докажите, что на сражение гарантированно сможет отправиться 51 рыцарь. *(«Вассал моего вассала – не мой вассал».)*

8. Есть m болельщиков: некоторые из них болеют за «Спартак», а остальные – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

[Летняя школа Л2Ш] Мухаметов О. М.
[*июль 2022 г.*] группа: 6-2 *12 июля 2022 г*

Графы 1. Деревья

1. **(a)** Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина.
(b) Докажите, что в любом дереве есть две висячих вершины. В любом ли дереве есть три висячих вершины?

2. Сколько рёбер может быть в дереве из n вершин?

3. Пусть Гамма – связный граф, состоящий из n вершин. Как мы помним, в Гамма хотя бы $n-1$ ребро. Докажите, что если в Гамма ровно $n-1$ ребро, то Гамма является деревом.

4. *Простой путь* – путь между двумя вершинами графа, ровно один раз проходящий по некоторым его вершинам.
(a) Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путем.
(b) Докажите, что граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.

5. *Расстоянием* между вершинами дерева назовём длину в рёбрах простого пути между ними.
(a) Расстояние между некоторыми вершинами A и B дерева равно 11. Рассмотрим вершину C. Пусть расстояние от C до A равно 7. Чему может быть равно расстояние до C до B?
(b) Чему может быть равна разность расстояний от C до A и до B?

6. **(a)** Докажите, что вершины любого дерева удастся покрасить в два цвета так, чтобы никакие вершины одного цвета не были соединены ребром.
(b) В каждой вершине дерева записали сумму длин идущих из неё рёбер. Докажите, что вершины удастся разбить на две группы с равной суммой записанных чисел.

7. В королевстве 101 рыцарь, некоторые рыцари являются вассалами других (вассал может иметь только одного сюзерена, причём сюзерен всегда богаче своего вассала). Для участия в сражении король решил выбрать нескольких рыцарей, ни один из которых не вассал другому. Докажите, что на сражение гарантированно сможет отправиться 51 рыцарь. *(«Вассал моего вассала – не мой вассал».)*

8. Есть m болельщиков: некоторые из них болеют за «Спартак», а остальные – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

Уравнения в целых числах

1. Решить в целых числах уравнения (a-f):
(a) $(x-2)(4y+x)=7$
(b) $(x-y)(x+y)=24$
(c) $7xy-4x^2=10$
(d) $2x^2+xy=x+7$
(e) $9x-15y=7$
(f) $xy-x-y=3$

2. Найдите хотя бы одно решение уравнения: $31x+28y+30z=365$.

3. Докажите, что уравнение $3x^2=5y^2$ не имеет решений в натуральных числах.

4. Решите в натуральных числах уравнение: $x+\frac{1}{y+1/z}=\frac{10}{7}$.

Уравнения в цифрах

5. Двузначное число в 6 раз больше своей суммы цифр. Найдите это число.

6. Шифр кодового замка является двузначным числом. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог быстрее открыть замок.

Геометрия. Разное

1. Квадрат со стороной 1 м разрезан на три прямоугольника с равными периметрами. Чему могут равняться эти периметры? Укажите все возможные варианты и объясните, почему других нет.

2. В одной из клеток бесконечного клетчатого листа бумаги сидит лягушонок. За один прыжок он смещается в соседнюю по стороне клетку. Сколько всего клеток на листе, в которых лягушонок может оказаться ровно через 2017 прыжков?

3. Фермеры Иванов, Петров, Сидоров, Васильев и Ермолаев владеют участками прямоугольной формы, площадь которых указана на чертеже (см. рисунок). Найдите площадь общего пастбища.

Рис. 1: к задаче 3

4. Прямоугольный треугольник разбили на несколько фигур так, как показано на рисунке. Зная указанные площади фигур, найдите площадь прямоугольника в левом нижнем углу.

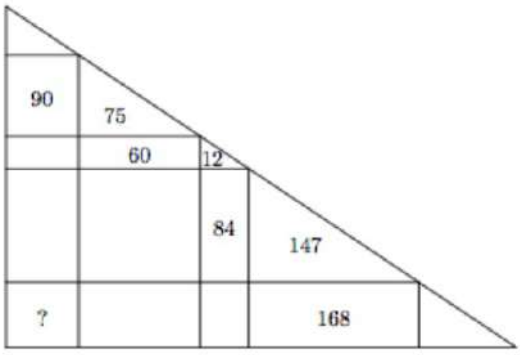


Рис. 2: к задаче 4

5. Можно ли в центры 16 клеток шахматной доски 8×8 вбить гвозди так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?

6. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник (см. рисунки). Найдите отмеченный угол.

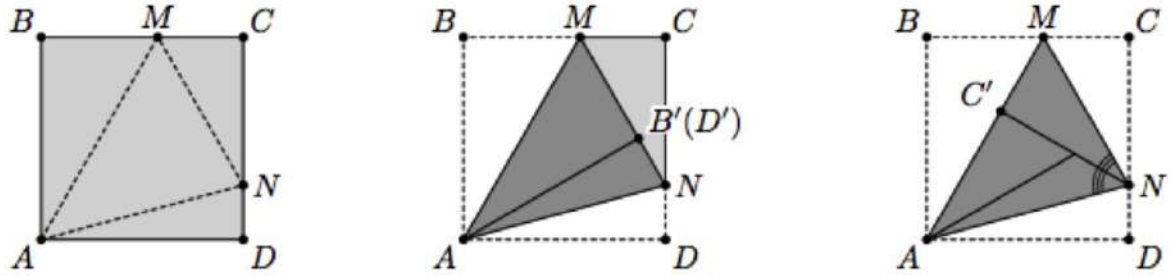


Рис. 3: к задаче 6

7. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (см. рисунок). Докажите, что углы двух белых треугольников соответственно равны.

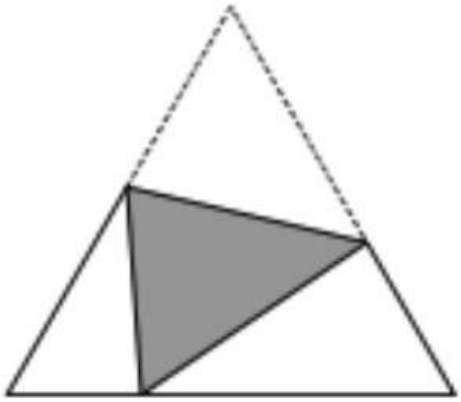


Рис. 4: к задаче 7

Делители

1. d_k - наибольший делитель числа n меньший n, d_1 - наименьший больший одного. Найдите все такие n, что: $d_1 \cdot d_2 + d_2 \cdot d_{k-1} = n$

2. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель в три раза больше самого маленького.

3. Число назовём хорошим, если оно меньше суммы трёх своих наибольших делителей, отличных от него самого (и при этом все эти делители у него имеются). Какое наименьшее положительное значение может принимать разность двух хороших чисел?

4. Найти все n такие что $n = d_1 + d_2 + d_{k-1} + d_k$. Где $1 < d_1 < d_2 < ...d_{k-1} < d_k < n$ все делители в порядке возрастания

5. d_k - наибольший делитель числа n меньший n, d_1 - наименьший больший одного. Найдите все такие n, что: $d_2 \cdot d_1 + d_1 \cdot d_{k-2} = n$

6. Серёжа выписал в ряд все натуральные делители некоторого натурального числа N в порядке возрастания. Оказалось, что для любых двух соседних чисел в этом ряду N делится и на разность этих чисел. Докажите, что для любых соседних чисел $a > b$ в этом ряду ab делится на $a - b$.

7. Назовём раскраску всех натуральных делителей натурального числа n не более чем в 4 цвета няшной, если для любых двух его делителей $a > b$ таких, что a не делится на b, делители a, b и НОД(a, b) покрашены в три разных цвета. Какое наибольшее количество няшных раскрасок может быть у числа, не являющегося степенью простого.

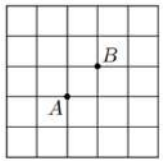
8. Дано натуральное число $n > 2$. Все его делители упорядочили по возрастанию: $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Докажите, что $d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1}d_k$ меньше n^2

Оценка + пример на клеточках

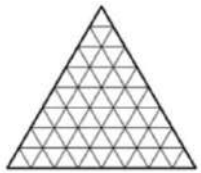
1. Сложите квадрат из наименьшего возможного количества трехклеточных «уголков».

2. Из одинакового количества квадратов со сторонами 1, 2 и 3 составьте квадрат наименьшего возможного размера.

3. Любознательный турист хочет прогуляться по улицам Старого города от вокзала (точка A на плане) до своего отеля (точка B). Турист хочет, чтобы его маршрут был как можно длиннее, но дважды оказываться на одном и том же перекрёстке ему неинтересно, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



4. Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1. Какое наименьшее количество треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?



5. Какое наименьшее количество доминошек можно разместить на доске 100×100 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце содержалась клетка хотя бы одной доминошки?

6. На какой наименьшей квадратной доске можно разместить комплект кораблей для игры в морской бой (один корабль 1×4, два корабля 1×3, три корабля 1×2 и четыре - 1×1)?

7. Квадрат 10×10 хотят покрыть квадратами 3×3 со сторонами, параллельными сторонам большого квадрата. Каким наименьшим числом квадратов 3×3 можно обойтись?

8. На доске 8×8 требуется расставить крестики так, чтобы в каждом квадрате 3×3 было ровно три крестика. Какое

а) наименьшее

б) наибольшее количество крестиков может быть использовано?

Оценка + пример (добавка)

1. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

2. Из десяти различных цифр составили два трёхзначных и одно четырёхзначное число. Эти три числа перемножили. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться произведение?

3. Выписали n чисел, идущих подряд. Оказалось, что ровно половина из них простые. Найдите все возможные n.

4. Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Грехова Д.Д.
[*июль 2022 г.*] группы: 6-1, 6-2 *14 июля 2022 г.*

Оценка + пример (добавка)

1. На доске записаны двузначные числа. Каждое число составное, но любые два числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел может быть записано?

2. Из десяти различных цифр составили два трёхзначных и одно четырёхзначное число. Эти три числа перемножили. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться произведение?

3. Выписали n чисел, идущих подряд. Оказалось, что ровно половина из них простые. Найдите все возможные n.

4. Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

Геометрия. Разное – Продолжение

1. Петя и Вася живут в соседних домах (см. план на рисунке). Вася живет в четвёртом подъезде. Известно, что Пете, чтобы добежать до Васи кратчайшим путем (не обязательно идущим по сторонам клеток), безразлично, с какой стороны обегать свой дом. Определите, в каком подъезде живет Петя.

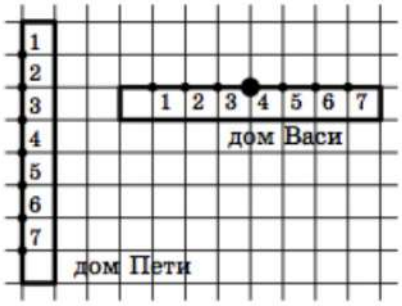


Рис. 1: к задаче 1

2. Можно ли из 13 кирпичей $1 \times 1 \times 2$ сложить куб $3 \times 3 \times 3$ с дыркой $1 \times 1 \times 1$ в центре?

3. Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рисунке у семи брусков указана их площадь поверхности. Какова площадь поверхности невидимого бруска?

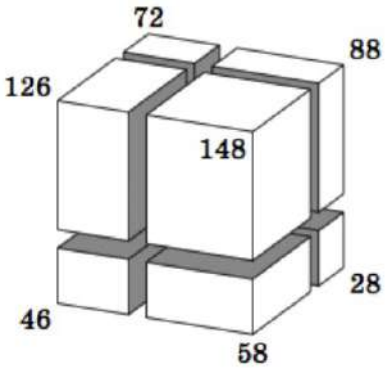


Рис. 2: к задаче 3

4. На поверхности куба проведена замкнутая восьмизвенная ломаная, вершины которой совпадают с вершинами куба. Какое наименьшее количество звеньев этой ломаной может совпасть с рёбрами куба?

5. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник (см. рисунки). Найдите отмеченный угол.

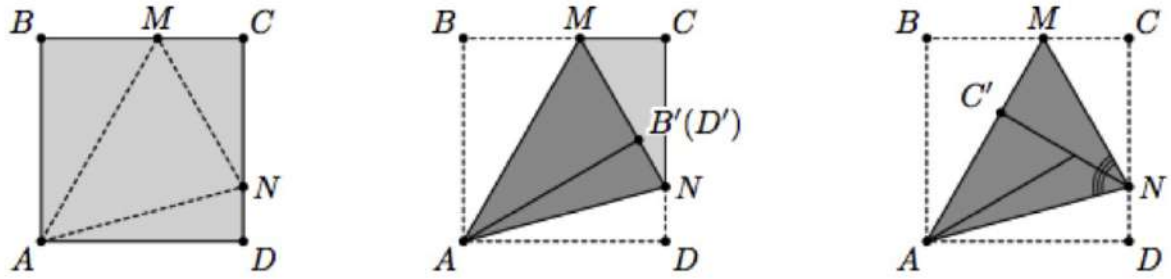
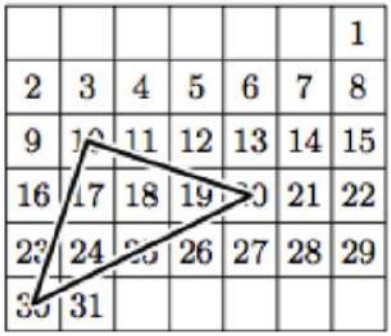


Рис. 3: к задаче 5

6. Наташа сделала из листа клетчатой бумаги календарь на январь 2006 года (см. рисунок) и заметила, что центры клеток 10, 20 и 30 января образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Наташа предположила, что это будет верно и в любом другом году, за исключением тех лет, когда центры клеток 10, 20 и 30 лежат на одной прямой. Права ли Наташа?



						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Рис. 4: к задаче 6

7. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (см. рисунок). Докажите, что углы двух белых треугольников соответственно равны.

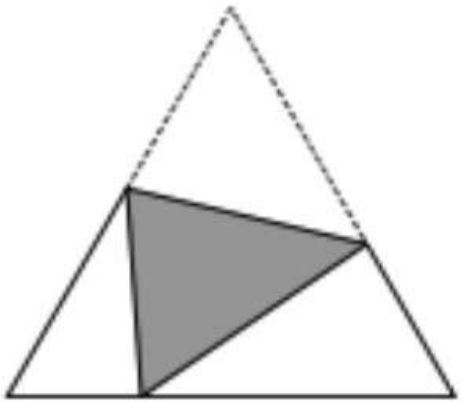


Рис. 5: к задаче 7

Остатки

1. Найдите остаток от деления
(a) 4^{2022} на 3;
(b) 6^{2023} на 7.

2. Докажите, что число $1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003 - 24$ делится на 999.

3. Делится ли
(a) $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 102 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 101$ на 103;
(b) $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99$ на 101;
(c) $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 104 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 103$ на 105.

4. Докажите, что $n^3 + 2$ не делится на 9 ни при каком натуральном n.

5. Докажите, что
(a) $p^2 - 1$ делится на 24, если p — простое число и $p > 3$;
(b) $p^2 - q^2$ делится на 24, если p и q — простые числа, большие 3.

6. Докажите, что если $a^2 + b^2 = c^2$, то
(a) хотя бы одно из чисел a, b делится на 3;
(b) хотя бы одно из чисел a, b или c делится на 5;
(c) произведение abc делится на 60.

7. a и b — натуральные числа, причём число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится и на 441.

8. a, b, c — натуральные числа, причём $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

Преобразования и переменные

1. Целое число увеличили на 2, при этом его квадрат уменьшился на 2016. Каким число было в начале (до увеличения)?

2. Если у прямоугольника ширину увеличить на 3 см, а высоту уменьшить на 3 см, его площадь не изменится. А как изменится площадь, если вместо этого у исходного прямоугольника ширину уменьшить на 4 см, а высоту увеличить на 4 см?

3. Фигура (см рисунок) составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если известно, что сторона самого маленького квадрата равна 1.

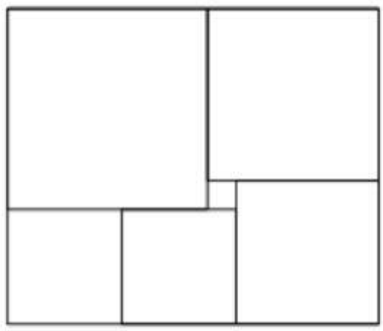


Рис. 1: к задаче 3

4. Может ли в равенстве

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

одно из чисел x, y или z быть однозначным, другое – двузначным, третье – трёхзначным?

5. Числа a и b таковы, что сумма $a + b$ и $3a + 2b$ положительны. Может ли быть отрицательным число $5a + 4b$? А $4a + 5b$?

6. Различные числа a и b удовлетворяют равенству $a^2 + b = b^2 + a$. Найдите их сумму.

7. Про числа a, b известно, что

$$\frac{1}{3a} + \frac{2}{3b} = \frac{3}{a + 2b}$$

Обязательно ли $a = b$?

8. В турнире Солнечного города по шахматам каждый из 100 участников сыграл с каждым ровно по одному разу («турнир в один круг»). После

турнира Незнайка неожиданно узнал, что за победу действительно давалось 1 очко, но за ничью давалось не $1/2$ очка, как он думал, а 0 очков, а за поражение – не 0 очков, а -1. В результате Незнайка набрал в два раза меньше очков, чем ему казалось. Сколько очков набрал Незнайка?

9. Шехерезада стала учительницей математики и задала школьникам на дом 1001 задачу. За каждую решённую задачу она начисляла 2 балла, за каждую неправильно решённую задачу штрафовала на один балл, а за каждую задачу, которую школьник не решал, штрафовала на пятьдесят баллов. Шахрияр правильно решил меньше 900 задач и набрал 1514 баллов. Сколько задач правильно решил Шахрияр?

Окружность и круг

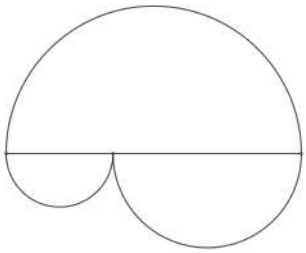
1. Сколько раз в сутки минутная и часовая стрелки:
(a) совпадают; **(b)** образуют прямой угол?

2. В маленьком городе только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На кольце есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка — через Зоопарк или не через Зоопарк — короче и во сколько раз?

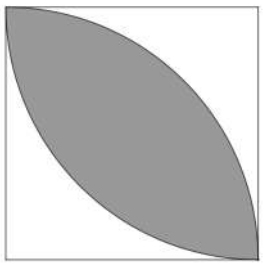
3. На какое наибольшее число кусков можно разделить круглый блинчик тремя прямолинейными разрезами?

4. В круге отметили точку. Разрежьте этот круг:
(a) на три части; **(b*)** на две части
и составьте из них новый круг, у которого отмеченная точка будет в центре.

5. Отрезок разделён точкой на два отрезка и построены три половины окружностей, диаметрами которых служат исходный отрезок и два полученных из него (см. рисунок). Докажите, что длина большей полуокружности равна сумме длин двух меньших полуокружностей.

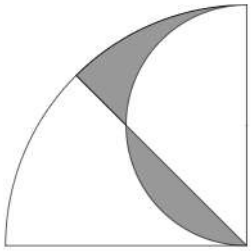


6. Две окружности, у которых центры — противоположные вершины квадрата со стороной 1, а радиусы равны 1, ограничивают закрашенную фигуру (см. рисунок). Найдите площадь этой фигуры.



7. Четверть круга разделили радиусом на две равные части и нарисовали в ней маленький полукруг (см. рисунок). Докажите, что площади закрашенных фигур равны.

8. Одна монета лежит неподвижно, а другая монета катится вокруг неё. Сколько раз подвижная монета обернётся вокруг своего центра, прежде чем вернётся в исходное положение, если:
(a) монеты одинаковые; **(b*)** радиус неподвижной монеты вдвое больше радиуса подвижной?



9.* **(a)** За круглым столом сидело несколько человек и перед ними стояли

таблички с их именами. Затем таблички как-то переставили и каждый пошёл к своей табличке по часовой стрелке. Докажите, что общий пройденный ими путь равен целому числу полных оборотов вокруг стола.
(b) Двенадцать собеседников совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Докажите, что между ними найдутся два таких собеседника, между которыми (считая от первого ко второму в направлении по часовой стрелке) во второй раз окажется столько же собеседников, сколько и в первый.

10.* Можно ли бумажный круг с помощью ножниц перекроить в квадрат той же площади? Разрешается сделать конечное число прямых разрезов и разрезов по дугам окружностей.

Игры. Позиции

В задаче хотят узнать, кто победит при правильной игре, если иного не сказано. Петя всегда ходит первым.
Выигрышными позициями *назовём такие, в которых побеждает первый игрок, проигрышными – где побеждает второй.*

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×8. В левом нижнем углу стоит *полу-ферзь*: он ходит на любое количество клеток вверх, вправо или вправо-вверх по диагонали. Петя и Вася по очереди делают ходы полуферзём.
(a) Выигрывает **(b)** Проигрывает
тот, кто поставит фишку в правый верхний угол.

2. Есть две стопки из 39 и 41 монеты. Петя и Вася играют в такую игру: за ход разрешается взять себе из любой стопки 2 монеты или полностью взять себе одну из стопок и разделить вторую на две новых (в каждой должна быть хотя бы одна монета). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

3. Игра начинается с числа 1. Петя и Вася играют в игру: за ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 3 до 11.
(a) Выигрывает **(b)** Проигрывает
тот, кто первым получит число, большее 2022.

4. Есть три кучки из 24, 27 и 28 камней соответственно. Петя и Вася играют в такую игру: за ход разрешается скинуть две кучки в море, а оставшуюся разделить на 3 непустых кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом Петя выписывает число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число $2a$, либо число $a+1$, где a – какое-то число, уже написанное на доске. При этом запрещается повторно выписывать уже написанные числа. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000.

6. **(a)** На доске записано целое положительное число N. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остается положительным). Тот, кто может записать лишь 1 или 2, проигрывает. При каких N первый игрок может выиграть, как бы ни играл соперник?
(b*) Та же задача, но в этот раз писать 2 можно.

[Летняя школа Л2Ш] Мухаметов О. М.
[*июль 2022 г.*] группа: 6-2 *18 июля 2022 г*

Игры. Позиции

В задаче хотят узнать, кто победит при правильной игре, если иного не сказано. Петя всегда ходит первым.
Выигрышными позициями *назовём такие, в которых побеждает первый игрок, проигрышными – где побеждает второй.*

1. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×8. В левом нижнем углу стоит *полу-ферзь*: он ходит на любое количество клеток вверх, вправо или вправо-вверх по диагонали. Петя и Вася по очереди делают ходы полуферзём.
(a) Выигрывает **(b)** Проигрывает
тот, кто поставит фишку в правый верхний угол.

2. Есть две стопки из 39 и 41 монеты. Петя и Вася играют в такую игру: за ход разрешается взять себе из любой стопки 2 монеты или полностью взять себе одну из стопок и разделить вторую на две новых (в каждой должна быть хотя бы одна монета). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

3. Игра начинается с числа 1. Петя и Вася играют в игру: за ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 3 до 11.
(a) Выигрывает **(b)** Проигрывает
тот, кто первым получит число, большее 2022.

4. Есть три кучки из 24, 27 и 28 камней соответственно. Петя и Вася играют в такую игру: за ход разрешается скинуть две кучки в море, а оставшуюся разделить на 3 непустых кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

5. Петя и Вася по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом Петя выписывает число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число $2a$, либо число $a+1$, где a – какое-то число, уже написанное на доске. При этом запрещается повторно выписывать уже написанные числа. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000.

6. **(a)** На доске записано целое положительное число N. Два игрока ходят по очереди. За ход разрешается либо заменить число на доске на один из его делителей (отличных от единицы и самого числа), либо уменьшить число на единицу (если при этом число остается положительным). Тот, кто может записать лишь 1 или 2, проигрывает. При каких N первый игрок может выиграть, как бы ни играл соперник?
(b*) Та же задача, но в этот раз писать 2 можно.

Делители-2

1. Известно, что у числа 1555848 ровно 100 делителей. Чему равно произведение этих делителей?

2. Сколько делителей у чисел $24, 1001, 2^4 3^2 11$?

3. Докажите, что у числа $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_n^{a_n}$, (где $p_1, p_2, ..., p_n$ – различные простые числа) ровно $(a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_n + 1)$ делителей.

4. У числа n^2 ровно 99 делителей. Сколько может быть делителей у числа n?

5. У скольких натуральных чисел, не превосходящих 300, ровно 9 делителей? Натуральное число делится на 13, но не делится на 169. Докажите, что сумма всех его делителей делится на 7.

6. Найдите все натуральные числа, делящиеся на 21, у которых ровно 21 делитель.

7. У натурального числа ровно 101 делитель. Докажите, что в нем хотя бы 31 цифра.

Что-то остается неизменным...

0. Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и небрежно помешивают. Затем зачёрпывают три ложки полученной смеси и переливают их обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

1. Одна костяшка домино покрывает две клетки шахматной доски. Сможете ли Вы покрыть костяшками все клетки, кроме двух противоположных (на одной диагонали). (Шахматная доска состоит из $8 \times 8 = 64$ клеток)

2. Имеется три кучки камней: в первой – 10, во второй – 15, в третьей – 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие части; проигрывает тот, кто не сможет сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?

3. В клетках квадратной таблицы $n \times n$ расставлены $+1$ и одна -1 во второй клетке слева в вехнем ряду. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных в одной строке или в одном столбце. Докажите, что сколько бы мы не проводили таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу, состоящую только из $+1$ для а) $n = 4$; б) $n = 5$.

4. Имеется два трёхлитровых сосуда. В одном 1 л воды, в другом – 1 л двухпроцентного раствора поваренной соли. Разрешается переливать любую часть жидкости из одного сосуда в другой, после чего перемешивать. Можно ли за несколько таких переливаний получить полуторапроцентный раствор в том сосуде, в котором вначале была вода?

5. Можно ли квадратную доску размером 10×10 замостить плитками размером 1×4?

6. На доске написано 99 чисел: $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/99$. Каждым ходом Петя стирает любые два числа и записывает вместо них отношение их произведения к сумме. Докажите, что последнее число на доске не зависит от порядка стирания и найдите это число.

7. Из книги вырвали 25 страниц. Может ли сумма 50 чисел, являющихся номерами (с двух сторон) этих страниц, быть равной 2021?

8.* Сегодня в 12 часов дня был прилив. Когда он будет (там же) завтра? *Напоминание-подсказка: Приливы объясняются притяжением Луны: грубо говоря, на поверхности Земли под влиянием этого притяжения образуются два горба (один направлен в сторону Луны, а другой в противоположную сторону). За сколько дней Луна совершает полный оборот вокруг Земли?*

Алгоритмы

- Ведущий загадал натуральное число от 1 до 100. За какое наименьшее количество вопросов, на которые можно отвечать только «Да» или «Нет», можно однозначно определить это число?
- Среди 20 монет одна фальшивая. За какое минимальное число взвешиваний на двухчашечных весах можно найти фальшивую монету, если известно, что она легче настоящих?

1. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах найти одну фальшивую монету среди четырех, если неизвестно, легче она или тяжелее?

2. Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Как за 7 проверок найти оба радиоактивных шара?

3. Шейх разложил свои сокровища по девяти мешкам: в первый мешок 1 кг, во второй – 2 кг, в третий – 3 кг, и так далее, в девятый – 9 кг. Коварный визирь украл часть сокровищ из одного мешка. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь шейху определить, из какого именно?

4. В орфографическом словаре 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Лёша открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой странице. Витя хочет угадать это слово, задавая вопросы, на которые Лёша отвечает ”Да” или ”Нет”. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

5. Лёша загадывает клетку доски $N \times N$. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Лёши, попала ли в него загаданная клетка.
(a) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 8$?
(b) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 5$?

6. Имеются красный, синий, зелёный и чёрный шарики, среди которых могут быть волшебные. Детектор позволяет определить, сколько из помещённых в него шариков волшебны. Как узнать, какие шарики волшебные, а какие нет, всего за три измерения?

7. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Седов Г. К.
[*июль 2022 г.*] группа: 6-2 *18.07.2022*

Алгоритмы

- Ведущий загадал натуральное число от 1 до 100. За какое наименьшее количество вопросов, на которые можно отвечать только «Да» или «Нет», можно однозначно определить это число?
- Среди 20 монет одна фальшивая. За какое минимальное число взвешиваний на двухчашечных весах можно найти фальшивую монету, если известно, что она легче настоящих?

1. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах найти одну фальшивую монету среди четырех, если неизвестно, легче она или тяжелее?

2. Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Как за 7 проверок найти оба радиоактивных шара?

3. Шейх разложил свои сокровища по девяти мешкам: в первый мешок 1 кг, во второй – 2 кг, в третий – 3 кг, и так далее, в девятый – 9 кг. Коварный визирь украл часть сокровищ из одного мешка. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь шейху определить, из какого именно?

4. В орфографическом словаре 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Лёша открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой странице. Витя хочет угадать это слово, задавая вопросы, на которые Лёша отвечает ”Да” или ”Нет”. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

5. Лёша загадывает клетку доски $N \times N$. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Лёши, попала ли в него загаданная клетка.
(a) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 8$?
(b) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 5$?

6. Имеются красный, синий, зелёный и чёрный шарики, среди которых могут быть волшебные. Детектор позволяет определить, сколько из помещённых в него шариков волшебны. Как узнать, какие шарики волшебные, а какие нет, всего за три измерения?

7. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$?

Цилиндр и шар

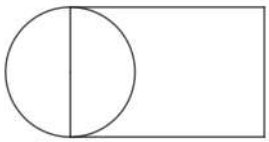
1. Расположите шесть одинаковых незаточенных круглых карандашей так, чтобы каждый карандаш касался всех остальных.

2. Что тяжелее: один шар радиуса 8 см или два шара радиусов 3 см и 5 см?

3. Радиус апельсина равен 4 см, а толщина кожуры равна 1 см. Объём какой части больше: съедобной или несъедобной?

4. Можно ли так расположить в пространстве шары, чтобы каждый касался всех остальных, используя:

(a) 4 шара; **(b)** 5 шаров?



5. Можно ли одной и той же пробкой специальной формы заткнуть отверстия:

(a) двух видов: круглое и прямоугольное;

(b) трёх видов: треугольное, квадратное и круглое?

Сравнительные размеры фигур приведены на рисунках.

6. Из Москвы вылетел вертолёт, который пролетел 300 км на юг, затем — 300 км на запад, 300 км на север и 300 км на восток, после чего приземлился. Оказался ли он южнее Москвы, севернее её или на той же широте? Оказался ли он западнее Москвы, восточнее её или на той же долготе?

7. В пустой аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, налили воды и положили на дно одинаковые стеклянные шарики. Если вынуть половину всех шариков, то уровень воды в аквариуме понизится на одну треть. На какую часть (от нового уровня) понизится уровень воды, если вынуть половину оставшихся шариков?

8. Два разных цилиндра имеют боковую поверхность, равную 100 см^2, а высота каждого цилиндра меньше 10 см. Докажите, что можно вырезать из бумаги параллелограмм площадью 100 см^2, которым можно оклеить боковую поверхность как первого, так и второго цилиндров.

9. Умелая хозяйка использует для раскатки теста цилиндрическую скалку, радиус основания которой равен 2 см, а общая длина — 35 см. Для того, чтобы к скалке не прилипало тесто, её покрывают мукой. На фигуру какой площади хватит муки с одной скалки?

10.* Моток ниток проткнули 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрёл форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?

Разнобой

1. Сложили все числа до 1000 в записи которых используются только цифры 0 и 2. Найдите набольший делитель этой суммы, не превышающий 100.

2. Представьте число 186 в виде суммы трёх попарно различных натуральных слагаемых так, что сумма любых двух делится на третье.

3. 26 учеников пронумерованы в классном журнале числами от 1 до 26. Каждый из них заявил:«Каждый, у кого номер имеет с мои общий делитель, больший 1, иногда врёт». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

4. В классе организовали несколько кружков. В каждый кружок ходит ровно 9 учеников, а каждый ученик — ровно в 2 кружка. Оказалось, что для любых двух кружков есть ровно один ученик, который ходит в оба эти кружка. Сколько детей посещают кружки?

5. Митя и Андрей делили одно и то же число с остатком. Митя на 8, Андрей — на 9. Неполное частное, которое получил Митя, в сумме с остатком от деления, который получил Андрей, дали 13. Какой остаток при делении получился у Мити?

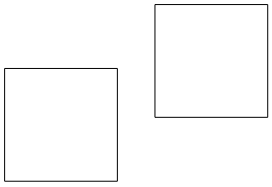
6. У каждого двузначного числа нашли произведение цифр, потом у каждого такого произведения подсчитали сумму цифр. Найдите наибольшее значение среди всех таких сумм.

7. Положительные числа a и b таковы, что сумма дробей

$$\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2022}{b+2022}$$

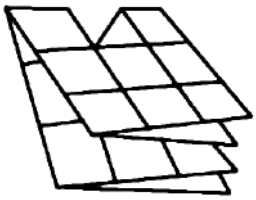
равна 2022. Найдите произведение этих дробей.

Симметрии

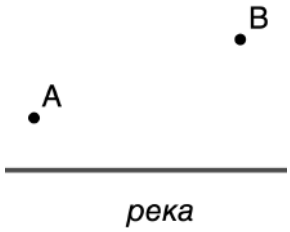


1. Как одним прямолинейным разрезом рассечь два квадратных блинчика на две равные части каждый?

2. Двое игроков по очереди кладут круглые монеты на прямоугольный стол на свободное от монет место. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

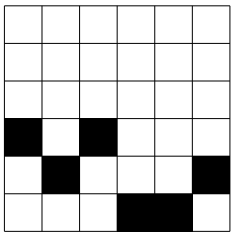


3. Квадратный лист размером 6×6 клеток сложили и вырезали из него часть согласно рисунку. Затем этот лист развернули. Нарисуйте развёрнутый лист размером 6×6 клеток и покажите на рисунке сделанные вырезы.



4. Туристы поставили две палатки, в точка A и B, неподалёку от берега реки. Туристы из одной палатки хотят навестить друзей из другой палатки и по дороге искупаться. Как им выбрать кратчайший путь?

5. Фигура симметрична относительно двух перпендикулярных прямых. Докажите, что она симметрична относительно точки их пересечения.



6. Квадрат 6×6 разделён на 36 маленьких квадратиков, и шесть из них закрашены согласно рисунку ниже. Разрешается перегнуть квадрат по любой линии сетки, а затем разогнуть обратно. Клетки, которые при перегибании совмещаются с закрашенными, тоже закрашиваются. За какое наименьшее количество перегибаний можно закрасить весь квадрат?

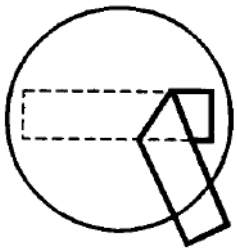
7. Разрежьте квадрат:

(a) на два равных пятиугольника; **(b)** на два равных шестиугольника.

8. Сложите из трёх равных составленных из клеток фигур без оси симметрии фигуру с осью симметрии.

9. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

10. Полоска бумаги прямоугольной формы такова, что её можно покрыть кругом радиуса 1. Полоску перегнули согласно рисунку. Докажите, что и теперь её можно покрыть кругом радиуса 1.



Остатки (добавка)

1. Найдите остаток от деления числа $2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2022 + 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2021$ на 2023.

2. Найдите все возможные остатки от деления квадрата натурального числа: (a) на 3; (b) на 4; (c) на 5. Может ли число $100\ldots04$ быть квадратом натурального числа?

3. В ряд лежат 1000 конфет. Сначала Максим съел девятую конфету слева, после чего съедал каждую седьмую конфету, двигаясь вправо. После этого Саша съел седьмую слева из оставшихся конфет, а затем съедал каждую девятую из них, также двигаясь вправо. Сколько конфет после этого осталось?

4. Докажите, что

(a) среди любых 11 целых чисел найдутся два, оканчивающихся одной и той же цифрой;

(b) среди любых 8 целых чисел найдутся два, разность которых делится на 7.

5. Верно ли, что среди любых семи натуральных чисел найдутся три, сумма которых делится на 3?

6. Маша задумала пять натуральных чисел и возвела их в квадраты. Юля утверждает, что среди этих квадратов найдутся такие два числа, что их разность делится на 9. Права ли она?

Много-мало

1. Может ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?

2. Площадь прямоугольника меньше 1 дм^2. Может ли его периметр быть больше 1 км?

3. На занятии Платон, Юля и Саша решили все задачи. Может ли оказаться, что Саша большинство задач решил раньше Юли, Юля — большинство раньше Платона, а Платон — большинство раньше Саши?

4. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов с суммой периметров 100?

5. На выпускном вечере было юношей и девушек поровну. В конце вечера оказалось, что было 10 танцев и каждый раз танцевали все.

(a) Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

(b) Как могло получиться, что в дополнение к тому в каждом танце (начиная со второго) был юноша, который танцевал и с более красивой, и с более умной девушкой?

6. В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. «Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

Группа 7-1

Разнобой по алгебре и тч

1. Вася записал k различных натуральных чисел, меньших 1000. За один ход он может любое число умножить на 2 или на 3. Найдите наименьшее k, при котором Вася гарантированно не сможет сделать все числа равными.

2. Вещественные числа x, y и z удовлетворяют неравенствам $|x-y| < z < x+y$. Докажите, что они удовлетворяют неравенствам $|x-z| < y < x+z$.

3. Для некоторых ненулевых чисел a, b, c, d уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ и $bx^3+cx^2+dx+a=0$ имеют общий корень. Чему этот корень может быть равен?

4. Целые числа a, b, c таковы, что $\dfrac{ab+bc+ac}{a+b+c}$ – целое число. Докажите, что и $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ – целое.

5. Докажите, что при любом $n > 100$ числа от 1 до n можно покрасить в красный и синий цвета так, чтобы произведение красных чисел было равно сумме синих.

6. Все натуральные числа от 1 до n разбили на k групп, причем в каждой группе наибольшее число равно сумме всех остальных. Докажите, что $n < (2+\sqrt{2})k$.

7. Даны натуральные числа $a > b$ и $c > d$. Докажите, что если $a+b+c+d = ab-cd$, то число $a+c$ составное.

8. Некоторое натуральное число $n > 1$ обладает следующим свойством: если d – делитель n, то $d+1$ – делитель $n+1$. Докажите, что n – простое.

9. Дано натуральное число n. Серёжа выписывает на доску все n^3 троек чисел от 1 до n включительно. После этого он находит в каждой тройке наибольшее число (числа) и стирает остальные. Например, в тройке $(1,3,4)$ он сотрёт 1 и 3, а в тройке $(1,2,2)$ он сотрёт только число 1. Докажите, что после завершения этого процесса количество оставшихся чисел на доске не может быть точным квадратом.

Соответствия

1. На окружности отмечено 2021 синяя точка и одна красная. Чего больше и на сколько: многоугольников с вершинами в синих точках или многоугольников у которых одна вершина красная?

2. Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей больше: **(а)** из $a1$ в $h7$ или из $a1$ в $h8$; **(б)** из $a1$ в $h7$ или из $a2$ в $h8$?

3. Последовательность из 5 цифр a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 называется «горой», если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5$ и «долиной», если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$. Чего больше: «гор» или «долин»?

4. **(а)** Меню школьной столовой постоянно и состоит из 11 блюд. Петя и Вася решили поспорить, кто из них дольше сможет питаться в школьной столовой. Условия спора следующие: Петя каждый день съедает чётное число блюд (возможно, что и ни одного), а Вася — нечётное, причём каждый день необходимо съедать новый набор блюд. Кто из них победит в споре?
(б) А кто победит в споре, если блюд будет 10?
(в) Предположим, что одно из блюд в столовой — компот. Кто из них выпьет больше компотов за время спора в каждом из случаев?

5. Будем называть натуральные числа приблизительно равными, если их разность не больше 1. Сколько существует разных способов разбить число 2022 на приблизительно равные слагаемые? (Слагаемых может быть одно или несколько. Способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.)

6. Каких пятизначных натуральных чисел больше: **(а)** чётных с суммой цифр 36 или нечётных с суммой цифр 37; **(б)** чётных с суммой цифр 36 или нечётных с суммой цифр 38?

Решите следующую задачу двумя способами: через соответствия и честно посчитав количество решений.

7. При каком значении a количество решений уравнения $x + y + z + t = 10$ в целых неотрицательных числах равно количеству решений уравнения $x + y + z + t = a$ в натуральных числах?

8. Придворный астролог царя Гороха называет время суток хорошим, если на часах с секундной стрелкой при мгновенном обходе циферблата по ходу часов минутная стрелка встречается после часовой и перед секундной, а плохим, если стрелки расположены в обратном порядке. Какого времени в сутках больше: хорошего или плохого?

9. Петя считает все пути из левого нижнего узла клетчатого квадрата 10×10 в правый верхний, идущие по линиям сетки вправо или вверх и не поднимающиеся выше главной диагонали. Его друг Вася расставляет в прямоугольнике 2×10 числа от 1 до 20 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа шли по возрастанию. У кого количество способов получилось больше?

Разминка на углах

1. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, I и H – центр вписанной окружности и ортоцентр соответственно. Выразите через α углы BIC и BHC.

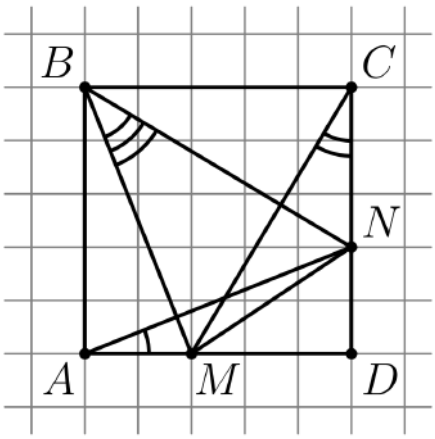
2. В треугольнике ABC точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Известно, что $\angle AC'B' = \angle B'A'C$, $\angle CB'A' = \angle A'C'B$, $\angle BA'C' = \angle C'B'A$. Докажите, что точки A', B', C' — середины сторон треугольника ABC.

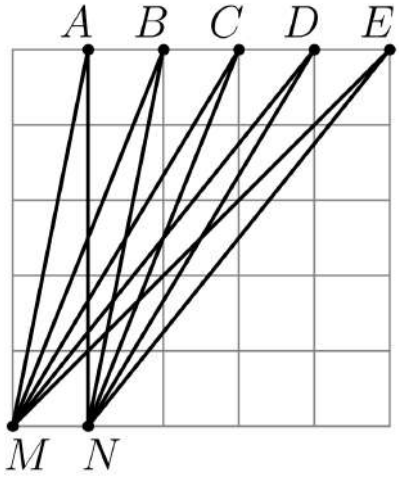
3. Биссектриса BD треугольника ABC отсекает от него равнобедренный треугольник BCD, а биссектриса CE отсекает от ABC тупоугольный равнобедренный треугольник ACE. Найдите углы треугольника ABC.

4. В треугольнике ABC точка M – середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите $\angle MBC$, если $\angle ABC = 100°$.

5. (a) От квадрата $ABCD$ отрезали прямоугольный треугольник MND. Найдите сумму трех углов, под которыми из вершин A, B и C видна его гипотенуза.

(b) Найдите сумму пяти углов: MAN, MBN, MCN, MDN, MEN.





6. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и C равны по 146°. Биссектриса угла D пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке O. Найдите $\angle AOD$.

7. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B, в котором $AB > BC$. На сторонах AB и BC отмечены точки M и N соответственно так, что $BM = CN = AB - BC$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке Q. Найдите $\angle AQM$.

Графы

1. В классе 30 человек. За месяц было 29 дежурств, в каждом дежурила пара учеников. Докажите, что можно так выставить всем ученикам класса по одной оценке по 5-балльной шкале, что будет выставлена хотя бы одна пятерка, и в каждой паре дежуривших сумма оценок будет равна 8.

2. После нескольких игровых дней однокругового футбольного чемпионата выяснилось, что любые пять команд можно так расположить по кругу, чтобы каждая команда сыграла со стоящими справа и слева. Докажите, что чемпионат можно завершить в три дня (в один день команда может сыграть не более одной игры).

3. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны числа от 1 до 10 (см. рис). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была 1 раз, на клетке 2 — 2 раза, ..., на клетке 9 — 9 раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

4. Имеется 20 бусинок десяти цветов, по две бусинки каждого цвета. Их как-то разложили в 10 коробок, по 2 бусинки в каждую коробку. Докажите, что число способов выбрать по одной бусинке из каждой коробки так, что все выбранные будут разного цвета, есть ненулевая степень двойки.

5. На шахматной доске стоят две одинаковых фишки. За один ход можно сдвинуть одну из фишек на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Так ходили, пока не прошли через все возможные позиции. Докажите, что какая-то позиция встретилась не менее двух раз.

6. В строку выписаны 2022 различных числа. За одну операцию можно поменять местами два любых числа. За какое наименьшее число операций можно гарантированно расставить числа по возрастанию?

7. 10 кружковцев образовали дежурную команду для решения домашних задач. В команде всегда не менее 3 человек. Каждый вечер в команду добавляется один человек либо из неё исключается один человек. Можно ли будет перебрать все допустимые составы команды ровно по одному разу?

8. На шахматной доске 5×5 расставили максимальное число коней так, чтобы они не били друг друга. Докажите, что такая расстановка — единственная.

Симметрия

1. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC.

2. Дана M-образная ломаная $ABCDE$. Известно, что $AB = BC = CD = DE$, $\angle ABC = \angle CDE$, K — середина BD. Докажите, что $AK = EK$.

3. Около прямолинейной железной дороги **(а)** по разную сторону **(б)** по одну сторону от неё расположены две деревни. В какой точке на железной дороге нужно построить станцию так, чтобы сумма расстояний до деревень была минимальной?

4. Точка C лежит внутри прямого угла AOB. Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.

5. Из точек A и B, лежащих на разных сторонах угла, восставлены перпендикуляры к сторонам, пересекающие биссектрису угла в точках C и D . Докажите, что середина отрезка CD равноудалена от точек A и B.

6. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки P и Q такие, что $BA = AP$ и $CB = CQ$. Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что треугольник IPQ равнобедренный.

7. В треугольнике ABC равны стороны AB и BC, а угол B равен $20°$. Докажите, что **(а)** $AB < 3AC$; **(б)** $AB > 2AC$.

8. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. На лучах AB и CB отложены отрезки AX и CY, равные стороне AC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

9. Внутри острого угла XOY взяты точки M и N, причём $\angle XON = \angle YOM$. На луче OX отмечена точка Q так, что $\angle NQO = \angle MQX$, а на луче OY — точка P так, что $\angle NPO = \angle MPY$. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны.

10. Дан выпуклый шестиугольник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, все стороны которого равны. Каждую его вершину отразили симметрично относительно прямой, проходящей через две соседние вершины. Полученные точки обозначили через P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6 соответственно. Докажите, что $\triangle P'_1P'_3P'_5 = \triangle P'_4P'_6P'_2$.

Целая и дробная часть

Определение. *Целая часть* $[x]$ числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x.
Важно: $k \in \mathbb{Z}, [x] = k \Leftrightarrow k \leqslant x < k + 1$.

Определение. *Дробная часть* числа x обозначается $\{x\}$ и определяется как $\{x\} = x - [x]$.

Свойства:

- Для любого целого n: $[x + n] = [x] + n$;
- Для любого целого n: $\{x + n\} = \{x\}$;
- $[x + y] \geqslant [x] + [y]$;
- $\{x + y\} \leqslant \{x\} + \{y\}$;
- $\{x + y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$.

Задачи:

1. Решите уравнение: $\left[\dfrac{3x - 1}{3}\right] = 5$.

2. Решите уравнение: **(a)** $\{3\{x\}\} = x$; **(b)** $\{6x\} + \{x\} = 1$.

3. Докажите, что если для любого $x \in \mathbb{R}$ верно $[x + a] = [x] + [a]$, то a – целое число.

4. **(a)** Докажите, что $[x] + [x + \dfrac{1}{2}] = [2x]$;
(b) Докажите, что $[x] + [y] + [x + y] \leqslant [2x] + [2y]$.

5. **(a)** Решите уравнение: $20\{x\} = 22[x]$;
(b) Решите уравнение: $[x^3] - [3x^2] + [3x] = \{x\} + 1$;
(c) Решите уравнение: $[x]\{x\} + x + 1 = 0$.

6. Про числа x, y, z известно, что $\{x + y\} = \{y + z\} = \{x + z\} = \dfrac{1}{3}$. Чему может быть равна $\{x + y + z\}$?

7. Докажите, что если p, q – нечетные простые числа, то $\left[\dfrac{p^q + q^p}{pq}\right]$ – четное число. *Если нужно, можете пользоваться МТФ без доказательства.*

8. Найдите все положительные рациональные x, удовлетворяющие уравнению $x[x]\{x\} = 201$.

Ещё симметрия

1. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке B_1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке C_1. Докажите, что расстояния от точки пересечения биссектрис треугольника ABC до прямых BC и B_1C_1 равны.

2. BL — биссектриса треугольника ABC, в котором $\angle C = 3\angle A$. На стороне AB отмечена точка M, а на стороне AC — точка N такие, что $\angle AML = \angle ANM = \angle 90°$. Докажите, что $BM + 2MN > BL + LM$.

3. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки K и L так, что L — середина отрезка AK, BK — биссектриса угла LBC и $BC = 2BL$. Докажите, что $\angle ACB = \angle ABL$.

4. Дан треугольник ABC. M — середина стороны BC, а P — проекция вершины B на серединный перпендикуляр к AC. Прямая PM пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что треугольник QPB равнобедренный.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD. Чему равно отношение $AB\colon AD$?

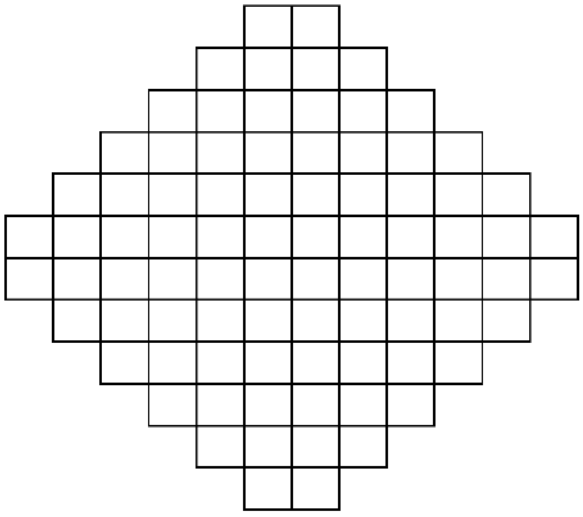
6. Дан равнобедренный треугольник ABC, углы при основании BC которого равны $80°$. Точки D и E на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $\angle CBD = 60°$ и $\angle BCE = 50°$. Найдите $\angle EDB$.

Графы обязательно помогут

1. Клетчатый квадрат 8×8 разрезали по границам клеток на три многоугольника одинакового периметра. Найдите наибольшее возможное значение этого периметра.

2. Есть 101 банка консервов массами 1001 г, 1002 г, ..., 1101 г. Этикетки с весами потерялись, но завхозу кажется, что он помнит, какая банка сколько весит. Он хочет убедиться в этом за наименьшее число взвешиваний. Есть двое чашечных весов: одни точные, другие — грубые. За одно взвешивание можно сравнить две банки. Точные весы всегда показывают, какая банка тяжелее, а грубые — только если разница больше 1,1 г, а иначе показывают равновесие. Завхоз может использовать только одни весы. Какие ему следует выбрать?

3. Фигура на рисунке разрезана по сторонам клеток на несколько многоугольников, ни один из которых не содержит квадрата 2×2. Каково наименьшее возможное число многоугольников?



4. На столе лежит 30 карточкой с номерами от 1 до 30. Все карточки перевёрнуты числами вниз. Андрей знает где какая карточка лежит. За одну операцию он может указать на любые две карточки и сообщить Илье разность чисел написанных на данных карточках (из большего числа вычитается меньшее). Какого наименьшего количества операций хватит для того, чтобы Илья смог гарантированно разложить карточки по возрастанию или убыванию?

Делители

Никогда такого не было.
И вот опять.

1. d_k - наибольший делитель числа n, d_1 - наименьший больший одного. Найдите все такие n, что: $d_1 \cdot d_2 + d_2 \cdot d_{k-3} = n$

2. У натурального числа n ровно 1000 натуральных делителей (включая 1 и само n). Эти 1000 делителей выписали в порядке возрастания. Оказалось, что любые два соседних делителя имеют разную чётность. Докажите, что в числе n более 150 цифр.

3. Докажите, что сумма квадратов делителей натурального числа, меньших его, меньше квадрата этого числа

4. Для каждого натурального $n > 1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число $d_n + d_{n+1}$ является точным квадратом.

5. Натуральное число $n > 1$ таково, что для любого натурального делителя d числа n число $n^2 + n + 1$ делится на число $d^2 + d + 1$. Докажите, что n или простое число, или квадрат простого числа.

6. Найти все нечётные натуральные n для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a + b - 1$ также делитель числа n.

7. Дано чётное число N. Посчитаем два числа - сумму всех чётных делителей N и сумму всех нечётных делителей N. Может ли произведение этих чисел быть точным квадратом?

Добавка

1. Все делители натурального числа N, кроме N и единицы, выписали в ряд по убыванию: $d_1 > d_2 > ... > d_k$. Оказалось, что в каждой паре делителей, одинаково удаленных от концов этого ряда, больший делитель делится на меньший (т.е. d_1 делится на d_k, d_2 на d_{k-1} и т.д.). Докажите, что в любой паре делителей числа N больший делитель делится на меньший.

2. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей.

Дополнительные построения

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Кроме того, внутри него существует такая точка O, что $AO = OD$ и $BO = CO$. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.

2. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

3. На биссектрисе внешнего угла при вершине C треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $AC + CB < AM + MB$.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$ причём $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

5. Точки E и F расположены на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ так, что $\angle AED = \angle DEF$. Докажите, что $EF = AE + FC$.

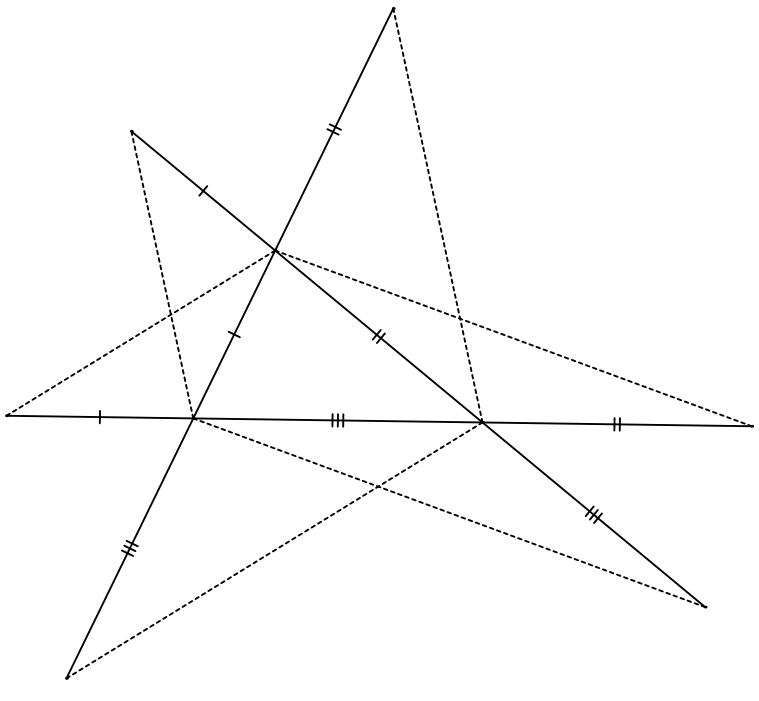
6. Докажите, что из трех медиан треугольника можно составить треугольник.

7. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне AC — точки M и N так, что $AM = NC$. Докажите, что $KM + NL \geqslant BC$.

8. В треугольнике ABC провели медиану CD. Известно, что $\angle ADC = 45°$ и $\angle DC = 15°$. Найдите угол ACD.

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Пусть ℓ — прямая, проходящая через середины BC и AD. Докажите, что ℓ пересекает прямые AB и CD под равными углами.

10. Докажите, что в шестиугольнике, образованном пунктирными прямыми, все пары противоположных сторон равны и параллельны.



Алгоритмы

1. На полке в произвольном порядке стоят десять томов энциклопедии, пронумерованных от 1 до 10. Разрешается менять местами любые два тома, между которыми стоит не меньше четырёх других томов. Всегда ли можно расставить все тома по возрастанию номеров?

2. Неуловимый Джо никогда не проигрывает на рулетке больше четырёх раз подряд и никогда не ставит больше 10 долларов. Как ему выиграть 1000 долларов? (В случае выигрыша на рулетке возвращается удвоенная ставка; вначале Джо имеет 100 долларов.)

3. На столе в библиотеке в двух стопках лежат 10 пыльных томов собрания сочинений Ленина. Андрей подходит к любой стопке, снимает сверху несколько книг и кладёт их на другую стопку. Как ему за не более 19 таких операций расположить все тома в одной стопке по порядку номеров (снизу 1-й, затем 2-й и т. д.)?

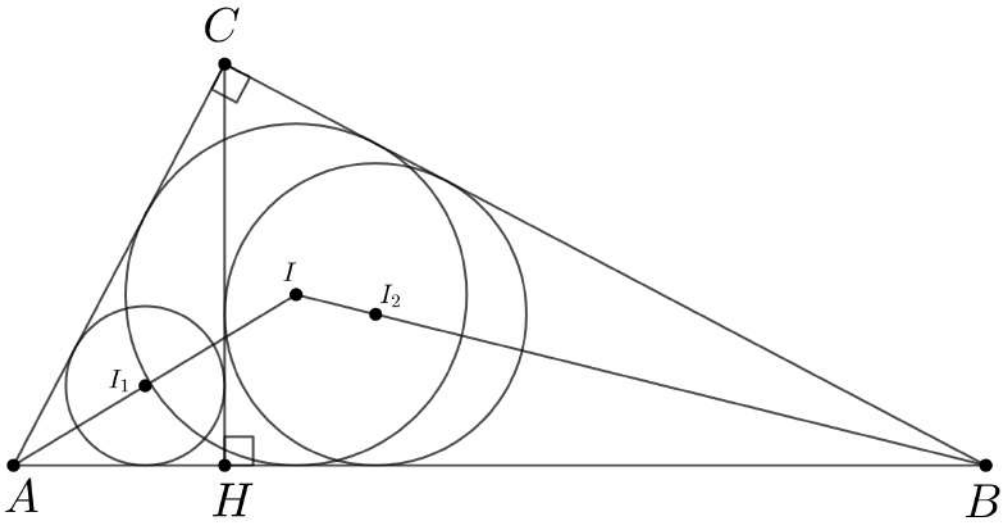
4. Имеются два набора из чисел 1 и -1, в каждом по 2022 числа. Докажите, что за некоторое число шагов можно превратить первый набор во второй, если на каждом шагу разрешается одновременно изменить знак у любых 1011 чисел первого набора. (Два набора считаются одинаковыми, если у них на одинаковых местах стоят одинаковые числа.)

5. Каждый зритель, купивший билет в первый ряд кинотеатра, занял одно из мест в первом ряду. Оказалось, что все места в первом ряду заняты, но каждый зритель сидит не на своём месте. Билетёр может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он может рассадить всех на свои места?

6. В таблице 8×8 стоят плюсы и минусы. За один ход можно выбрать какие-нибудь строку и столбец и поменять все 15 знаков в их объединении на противоположные. Докажите, что такими операциями можно добиться того, чтобы по всех клетках таблицы стояли плюсы.

7. В игре «Десант» две армии захватывают страну. Они ходят по очереди, каждым ходом занимая один из свободных городов. Первый свой город армия захватывает с воздуха, а каждым следующим ходом она может захватить любой город, соединённый дорогой с каким-нибудь уже занятым этой армией городом. Если таких городов нет, армия прекращает боевые действия (при этом, возможно, другая армия свои действия продолжает). Найдётся ли такая схема городов и дорог, что армия, ходящая второй, сможет захватить более **(а)** 60%; **(б)** 70%; **(в*)** 99% всех городов, как бы ни действовала первая армия?

Внутри прямоугольного треугольника



В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведём высоту CH.

Обозначим через a, b, c, p стороны BC, AC, AB и полупериметр треугольника ABC.

r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

1. Докажите, что $r = p - c$.

2. r_1, r_2, r — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACH, BCH и ABC. Докажите, что $r_1 + r_2 + r = CH$.

В треугольниках ACH и BCH проведём биссектрисы CT_1 и CT_2.

3. Докажите, что **(а)** $AT_2 = AC, BT_1 = BC$; **(б)** $T_1T_2 = 2r$.

Точки I_1, I_2, I — инцентры треугольников ACH, BCH и ABC соответственно.

4. Докажите, что **(а)** I — ортоцентр треугольника CI_1I_2; **(б)** Прямая I_1I_2 пересекает катеты под углом $45°$.

5. Докажите, что $T_1I_2 \perp CT_2$ и $T_2I_1 \perp CT_1$.

6. Найдите углы треугольника T_1IT_2.

Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках X, Y, Z.

7. Докажите, что точки I, I_1, I_2, T_1, T_2 лежат на одной окружности с центром Z.

8. Докажите, что точки I_1 и I_2 являются ортоцентрами треугольников AYZ и BXZ соответственно.

9. Докажите, что отрезки XI_1, YI_2 и CZ пересекаются в одной точке.

10. Вторая внешняя касательная к окружностям, вписанным в треугольники ACH и BCH, пересекает CH в точке K. Докажите, что $CK = r$.

11. Докажите, что ортоцентр треугольника XYZ лежит на отрезке CH.

Формула включений-исключений

1. Сколько существует чисел меньших 1000 **(а)** взаимно простых с 6? **(б)** взаимно простых с 30? **(в)** чётных взаимно простых с 15?

2. Сколько существует целых чисел от 1 до 10^6, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвёртой степенью?

3. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневый переплеты. Сколькими способами он может это сделать, если в каждый цвет должна быть переплетена хотя бы одна книга?

4. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один не сел на свое место? (Ответ можно оставить в «страшном» виде.)

5. Рассмотрим решения уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 27,$$

где x_i — целые неотрицательные числа. Назовём решение *плохим*, если какая-то из переменных больше или равна 10. Обозначим через A_i множество тех плохих решений, для которых $x_i \geqslant 10$. Найдите $|\bigcup A_i|$ — количество плохих решений.

Замечание. Как мы знаем количество счастливых билетов равняется количеству билетов с суммой цифр 27. Данная задача позволяет найти их количество.

6. В квадрат площади 5 помещено девять многоугольников, каждый площади 1. Докажите, что какие-то два из них имеют пересечение площади не меньше 1/9.

7. **(а)** Для натуральных a, b и c докажите равенство

$$\text{НОК}(a,b,c) = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \text{НОД}(a,b,c)}{\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОД}(b,c) \cdot \text{НОД}(c,a)}.$$

(б) Придумайте и докажите аналогичную формулу для $\text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

8. Упростите выражение

$$n^n - C_n^1 \cdot (n-1)^n + C_n^2 \cdot (n-2)^n - \ldots + (-1)^n \cdot C_n^n \cdot (n-n)^n.$$

Делимость

Ну пары все-таки называются алгебра

1. Может ли НОК двух чисел равняться их сумме?

2. Для каких m может натуральное число, делящееся на число состоящие из m , иметь сумму цифр меньше m?

3. Наидите все пары натуральных чисел x и y, для которых $x \cdot y^2 + 7$ делится на $x^2 \cdot y + x$.

4. Числа a и b взаимно просты. Известно что $a^2 + b^2$ делится на $a + b^2$. Найдите a и b.

5. Даны натуральные числа a и b. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

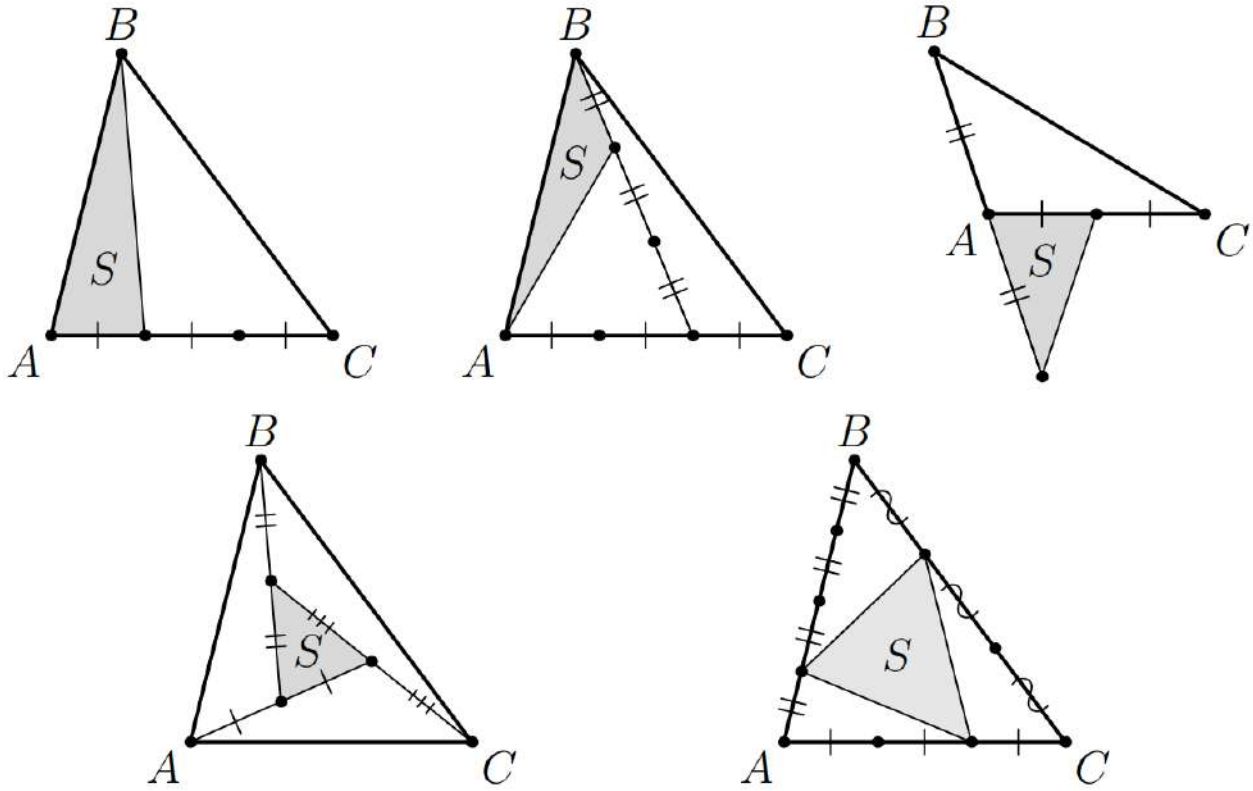
6. Числа a и b два подряд идущих делителя числа n. Известно, что $a^2 + b = n$. Найти n.

Площади

Стоим

1. Пусть E и F – середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника,образованного прямыми AE, ED, BF и FC, если площадь $ABCD$ равна S.

2. Выразите площадь треугольника ABC через S.



3. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, расположенной внутри правильного треугольника, до его сторон не зависит от выбора точки. А верно ли это для правильного n-угольника?

Двигаем

4. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум сторонам и пересекающие AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что $S_{CDE} = S_{BDF}$.

5. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

6. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$.Через середину G диагонали BD

проведена прямая, параллельная диагонали AC, пересекающая сторону DC в точке H. Докажите, что отрезок AH делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

Думаем

7. **(a)** Найдите внутри треугольника ABC все такие точки P, что $S_{ABP} = S_{ACP}$.
(b) Найдите внутри треугольника ABC все такие точки Q, что выполняется равенство $S_{ABQ} : S_{BCQ} : S_{CAQ} = 1 : 2 : 3$.

8. На каждой стороне параллелограма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна стороне параллелограмма.

9. На сторонах BC и DC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки D_1 и B_1 так, что $BD_1 = DB_1$. Отрезки BB_1 и DD_1 пересекаются в точке Q. Докажите, что AQ – биссектриса угла BAD.

Запуск процесса

1. В компании 40 человек, у каждого не более 19 врагов. Докажите, что их можно посадить за круглый стол так, чтобы никто не сидел рядом со своим врагом.

2. В турнире по футболу принимает участие 32 команды из 8 стран, из каждой страны не более 16 команд. Докажите, что можно распределить команды по парам для проведения 1/16 финала так, чтобы команды из одной страны не играли друг против друга.

3. **(a)** Есть 20 камней, вес каждого – не более 5 кг. Докажите, что можно все эти камни разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более, чем на 5 кг.
(b) Есть 20 камней неизвестного веса и двухчашечные весы без гирь. Докажите, что, сделав не более 19 взвешиваний, можно все камни разложить на две кучки так, чтобы веса кучек отличались не более чем на вес самого тяжелого камня.
Автор листка умеет не более, чем за 18...

4. Дети в летней школе занимаются в нескольких разных группах (каждый ребенок может состоять более, чем в одной группе). Преподаватели могут залезть в таблицу и удалить все плюсики у какого-то школьника, чтобы сделать его обиженным. Докажите, что преподаватели могут так поудалять плюсики, чтобы в каждой группе числился, по крайней мере, один обиженный школьник и для любого обиженного школьника нашлась группа, в которой он был бы единственным обиженным.

5. На плоскости отмечены 2022 точки, никакие три точки не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести 1011 непересекающихся отрезков с вершинами в этих точках.

6. На встрече выпускников у каждого не более 25 знакомых. Докажите, что можно их развести по 3 залам так, чтобы у каждого в его зале было не более 8 знакомых.

7. На полке стоят n книг, пронумерованных от 1 до n, но расположенных в произвольном порядке. Вы не особо сильны в алгоритмах сортировки, поэтому вы просто берете случайную книгу, стоящую не на своей позиции, и ставите её, куда надо (сдвинув промежуточные книги на одну позицию). Докажите, что запущенный процесс (за конечное число перемещений), все же, приведет к тому, что все книги будут стоять на своих местах.

Добавка. Смотрим в сторону преобразований

Вся математика держится на двух слонах:
Неравенствах и преобразованиях.

1. Наименьшее общее кратное скольки чисел может равняться их сумме?

2. Числа a и b — натуральные. Оказалось, что числа $\frac{a^2}{a+b}$ и $\frac{b^2}{a+b}$ — простые. Докажите, что $a = b$

3. Целые числа и таковы, что $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 = xyz$. Докажите, что $x^3+y^3+z^3$ делится на $x+y+z+6$.

4. Пусть p простое число. Найдите возможные НОД чисел $\frac{a^p+b^p}{a+b}$ и $a+b$, где a и b взаимно просты

5. x^2+y^2-1 делится на $x+y-1$. Доказать, что $x+y-1$ не является простым.

Степень вхождения

Простые числа входят и выходят

1. На сколько нулей оканчивается число 100! ?

2. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится число $(n+1)(n+2)...(2n)$

3. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n Пусть p— простое, и C_n^k делится на p^a. Докажите, что $n > p^a$

4. Числа от 1 до 12 разбили на 2 группы так, что произведение чисел в одной из них делится на другое. Чему равно наименьшее отношение этих произведений?

5. Какое максимальное количество натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выбрать так, чтобы произведение любых двух из них было полным квадратом?

6. Назовём натуральное число забавным, если все его простые делители меньше, чем 20 Докажите, что среди любых 400 забавных чисел найдутся два таких, что их произведение – полный квадрат.

7. Докажите, что для любого натурального m существует такое n, что 2 входит в разложение n! в степени, делящейся на m.

8. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

9. Натуральные числа $a, b, n > 1$ таковы,что $a^n + b^n$ делится на ab. Докажите, что a^{n-1} делится на b.

Специальные треугольники

30-120-30

1. **(a)** В треугольнике ABC с углом $B = 120^\circ$ на стороне AC отметили точки M и N так, что $AM = MN = NC = BM$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
(b) Точки M и N на стороне AC равнобедренного треугольника ABC, в котором $\angle B = 120^\circ$, таковы, что $AM = MN = NC$. Докажите, что треугольник BMN равносторонний.

2. В треугольнике ABC углы A и C равны 30°. На прямой, проходящей через точку A перпендикулярно AC, отметили точку K такую, что $BK = AC$. Чему может быть равен угол AKB?

3. Треугольник ABC – равнобедренный с углами при основании AC, равными 30°. Точка M – середина AB. Точка N симметрична M относительно AC. Прямые AC и NB пересекаются в точке P, а прямые PM и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $MQ = BN$.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 120^\circ$. На стороне AB отмечена такая точка P, что $BP = 2AP$. На стороне CB отмечена точка T такая, что $\angle CPT = 30^\circ$. Докажите, что $BT = 2CT$.

5. В треугольнике ABC отмечены середины сторон AC и BC – точки M и N соответственно. Угол MAN равен 15°, а угол BAN равен 45°. Найдите угол ABM.

20-40-120

6. В треугольнике ABC угол A равен 120°, угол B равен 40°, AD – биссектриса угла A этого треугольника. Докажите, что $BC = AC + AD$.

7. В треугольнике ABC угол A равен 120°, угол B равен 40°, AD – биссектриса угла A этого треугольника. На стороне AC отметили точку E такую, что $CE = BD$. Докажите, что $AD \perp BE$.

8. В треугольнике ABC углы A и B равны 40° и 20° соответственно. На стороне CB отмечена точка M такая, что $CM = CA$. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка P такая, что $\angle CMP = 40^\circ$. Найдите угол CBP.

9. В треугольнике ABC углы A и B равны 40° и 20° соответственно. На продолжении стороны AC за точку C отметили точку P такую, что $CP = AB - BC$. Найдите угол CBP.

20-80-80

10. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°. На стороне BC отметили точку K такую, что $BK = AC$. Найдите угол BAK.

11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°. На стороне BC отметили точку K, а на стороне BA – точку L, причем $BK = AL = AC = x$. Докажите, что $KL = x$.

12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°, AD – биссектриса угла A этого треугольника. Докажите, что $AD + AC = BD$.

13. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°. На стороне BC отметили точку P такую, что $AC = 2CP$. CH – высота треугольника ABC. Найдите угол BHP.

Неравество

Числа между квадратами и не только

1. Докажите, что если число n не является простым или произведением двух простых, то $d_k \geqslant d_1^2$

2. Найдите все a такие что a^3 делится на $a^2 - a$.(Постарайтесь решить эту задачу, не сокращая на a)?

3. Найдите все натуральные a, b, c, для которых
(a) $a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^3$ **(b)** $a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$

4. Для любого k верно, что $(a_1 + k)...(a_n + k)$ делится на $a_1 \cdot ... \cdot a_n$. Докажите, что $a_1 \cdot ... \cdot a_n = n!$, если $a_1, a_2, ..., a_n$ различные числа

Квадраты

5. Докажите что для чисел $n^2 < a < b < c < d < (n+1)^2$ верно, что ad не может быть равно bc.

6. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами?

Старая задача на новый лад

7. Натуральное число $n > 1$ таково, что для любого натурального делителя d числа n число $n^2 + n + 1$ делится на число $d^2 + d + 1$. Докажите, что n или простое число, или квадрат простого числа.

Немного инвариантов

1. Квадрат 99×99 разрезали на прямоугольники. Докажите, что найдется прямоугольник, периметр которого делится на 4.

2. На доске записаны числа $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2022}$. Каждым ходом стираются два числа a, b и записывается число $\frac{ab}{a+b}$. Какое число может остаться последним?

3. В одной вершине куба написано число 1, во всех остальных – 0. За один ход можно прибавить к двум соседним вершинам по 1 (соседними называем вершины, соединенные ребрами). Могут ли через несколько ходов все числа в вершинах куба быть кратными 3?

4. На прямой отмечены две точки: слева синяя, справа красная. За одну операцию можно добавить или стереть две отмеченные точки одинакового цвета, если между ними нет других отмеченных точек. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы на прямой снова остались только две отмеченные точки, но синяя – справа?

5. На доске записаны числа $1, 2, 3, 4, 5, 6$. За один ход можно стереть два числа $x \neq y$ и записать вместо них два числа $\frac{xy}{|x-y|}$ и $\frac{\max(x,y)}{2}$. Пусть n – наименьшее число, которое может образоваться на доске после нескольких таких ходов.

(a) Докажите, что $n > \frac{20}{49}$; **(b*)** Докажите, что $n \geqslant \frac{10}{23}$.

Группа 7-2

Соответствия

1. Каких графов с восемью вершинами больше: тех в которых ровно тринадцать рёбер, или тех, в которых ровно пятнадцать рёбер?

2. Среди автобусных билетов с номерами от 000000 до 999999 каких больше: счастливых (у которых сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр) или билетов с суммой цифр 27?

3. В одном доме живут 19 мальчиков и одна девочка. Назовём компанией любую группу, состоящую из трёх или более детей из этого дома. Каких компаний больше: с девочкой или без девочки, и на сколько?

4. На окружности отмечено 2021 синяя точка и одна красная. Чего больше и на сколько: многоугольников с вершинами в синих точках или многоугольников у которых одна вершина красная?

5. Хромой король умеет ходить только вверх, вправо и вправо-вверх. Каких путей больше: **(а)** из $a1$ в $h7$ или из $a1$ в $h8$; **(б)** из $a1$ в $h7$ или из $a2$ в $h8$?

6. Последовательность из 5 цифр a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 называется «горой», если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \geqslant a_4 \geqslant a_5$ и «долиной», если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$. Чего больше: «гор» или «долин»?

7. **(а)** Меню школьной столовой постоянно и состоит из 11 блюд. Петя и Вася решили поспорить, кто из них дольше сможет питаться в школьной столовой. Условия спора следующие: Петя каждый день съедает чётное число блюд (возможно, что и ни одного), а Вася — нечётное, причём каждый день необходимо съедать новый набор блюд. Кто из них победит в споре?
(б) А кто победит в споре, если блюд будет 10?
(в) Предположим, что одно из блюд в столовой — компот. Кто из них выпьет больше компотов за время спора в каждом из случаев?

8. Каких пятизначных натуральных чисел больше: **(а)** чётных с суммой цифр 36 или нечётных с суммой цифр 37; **(б)** чётных с суммой цифр 36 или нечётных с суммой цифр 38?

9. При каком значении a количество решений уравнения $x + y + z + t = 10$ в целых неотрицательных числах равно количеству решений уравнения $x + y + z + t = a$ в натуральных числах?

[Лицей «Вторая школа»] Овченков А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 7-2 *6 июля 2022 г.*

Разминка на углах

1. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, I и H – центр вписанной окружности и ортоцентр соответственно. Выразите через α углы BIC и BHC.

2. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB взята такая точка D, что $BD = BC$. Найдите CD, если $AD = 4$.

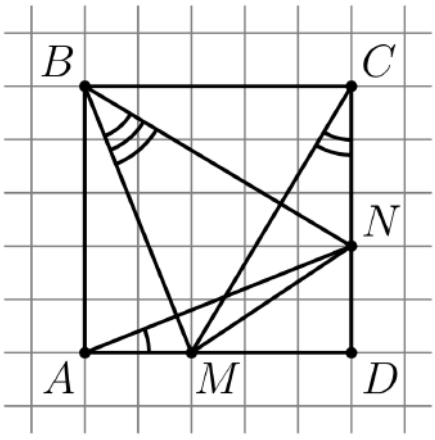
3. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AN, высота BH и серединый перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите угол BAC.

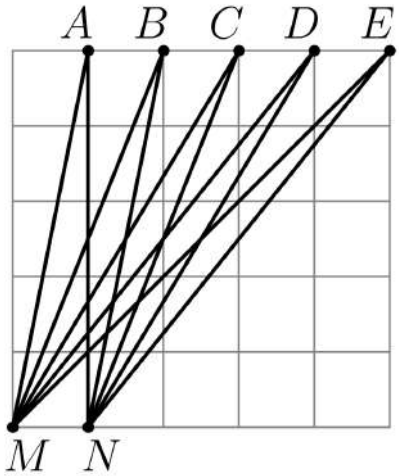
4. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом при основании $72°$. На отрезке BC отмечена точка K так, что $BK = AC$. Докажите, что K – основание биссектрисы $\angle BAC$.

5. В треугольнике ABC точка M – середина AC. На стороне BC взяли точку K так, что угол BMK прямой. Оказалось, что $BK = AB$. Найдите $\angle MBC$, если $\angle ABC = 100°$.

6. (a) От квадрата $ABCD$ отрезали прямоугольный треугольник MND. Найдите сумму трех углов, под которыми из вершин A, B и C видна его гипотенуза.

(b) Найдите сумму пяти углов: MAN, MBN, MCN, MDN, MEN.





7. На сторонах AB и AD единичного квадрата $ABCD$ выбраны точки N и P соответственно. Причем периметр треугольника ANP равен 2. Докажите, что $\angle NCP = 45°$.

MK. Задача 7 из листика 7-1.

Разнобой по алгебре и тч

1. Вася записал k различных натуральных чисел, меньших 1000. За один ход он может любое число умножить на 2 или на 3. Найдите наименьшее k, при котором Вася гарантированно не сможет сделать все числа равными.

2. Вещественные числа x, y и z удовлетворяют неравенствам $|x-y| < z < x+y$. Докажите, что они удовлетворяют неравенствам $|x-z| < y < x+z$.

3. Для некоторых ненулевых чисел a, b, c, d уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$ и $bx^3+cx^2+dx+a=0$ имеют общий корень. Чему этот корень может быть равен?

4. Целые числа a, b, c таковы, что $\dfrac{ab+bc+ac}{a+b+c}$ – целое число. Докажите, что и $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$ – целое.

5. Докажите, что при любом $n > 100$ числа от 1 до n можно покрасить в красный и синий цвета так, чтобы произведение красных чисел было равно сумме синих.

6. На доске в строчку записаны 100 чисел. Докажите, что можно между ними поставить знаки сложения, умножения и скобки так, чтобы значение полученного выражения делилось на 6^{20}.

7. Докажите, что уравнение $a^2 = (b^2-1)(c^2-1)+2$ не имеет решений в целых числах.

8. Даны натуральные числа $a > b$ и $c > d$. Докажите, что если $a+b+c+d = ab-cd$, то число $a+c$ составное.

9. Некоторое натуральное число $n > 1$ обладает следующим свойством: если d – делитель n, то $d+1$ – делитель $n+1$. Докажите, что n – простое.

Последовательности

Говорят, что задана последовательность чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, (также обозначается $\{a_n\}$) если по каждому номеру n можно определить некоторое число a_n. Число с номером n называется $n-$ым членом последовательности.

Определение. *Арифметическая прогрессия* $\{a_n\}$ – последовательность, в которой каждый следующий член отличается от предыдущего на фиксированное число d, называемое *разностью* арифметической прогрессии. Иначе говоря, $a_{n+1} = a_n + d$.

Определение. *Геометрическая прогрессия* $\{b_n\}$ – последовательность, первый член которой ненулевой, а каждый следующий член равен произведению предыдущего члена на некоторое фиксированное ненулевое число q (называемое *знаменателем* геометрической прогрессии). Иначе говоря, $b_{n+1} = b_n \cdot q$.

1. **(a)** Выведите формулу общего члена арифметической прогрессии $\{a_n\}$. То есть, формулу, в которой a_n выражается через n, d и a_1;
(b) Выведите формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии (аналогично, выразив её через n, d, a_1).

2. Пусть $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия. Докажите, что для любого $k < n$: $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$.

3. **(a)** Выведите формулу общего члена геометрической прогрессии $\{b_n\}$. То есть, формулу, в которой b_n выражается через b_1, q, n.

(b*) Выведите формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии (аналогично, выразив её через b_1, q, n).
Hint: умножьте всё на $(q-1)$ *и раскройте скобки.*

4. Пусть $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия. Докажите, что для любого $k < n$: $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$.

5. Числа $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{a+c}, \dfrac{1}{b+c}$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что и числа a^2, b^2, c^2 тоже образуют арифметическую прогрессию.

---

6. В числовой последовательности $4, 7, 5, 8, 4, 4, 1, ...$ каждый член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы предшествующих четырёх членов. Встретятся ли в этой последовательности следующие «куски»?
(a) 8, 2, 3, 9; **(b)** 1, 2, 3, 4; **(c)** 4, 7, 5, 8.

7. Последовательность l_k строится следующим образом: $l_0 = 2^{100} - 1, l_{k+1}$ равно наибольшему нечетному делителю числа $3l_k + 1$. Найдите l_{99}.

8. Последовательность a_n задана условием (для $n \geqslant 2$): $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Найдите a_{100}, если $a_1 = 1, a_2 = 2$.

9. Последовательность x_n задана условием: $x_1 = 20, x_2 = 101$, $x_{n+2} = x_n - \dfrac{1}{x_{n+1}}$. Докажите, что, рано или поздно, найдется такое k, что $x_k = 0$.

10. Последовательность $a_1, a_2, ...$ натуральных чисел обладает следующим свойством: для каждого натурального $n > 2$ число a_n – это наименьшее натуральное число, делящееся на n и не меньшее чем a_{n-1}. Докажите, что начиная с некоторого места эта последовательность будет иметь вид $a_n = cn$ для некоторого фиксированного числа c.

Деревья

Определение 1. Связный граф без циклов называется *дерево*.

Определение 2. Часть графа содержащая все его вершины и являющаяся деревом называется *остовным деревом* или *скелетом*.

Свойство 1. В любом связном графе можно выделить остовное дерево.

Свойство 2. В дереве есть хотя бы две висячие вершины.

Свойство 3. В дереве на n вершинах ровно $n - 1$ ребро.

Свойство 4. В связном графе на n вершинах хотя бы $n - 1$ ребро.

1. Докажите, что из связного графа можно удалить вершину без потери связности.

2. Клетки шахматной доски раскрашены в 20 цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета, причём все 20 красок использованы. Две краски называются соседними, если существуют окрашенные ими соседние по стороне клетки. Чему равно наименьшее число пар соседних красок?

3. В стране 15 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что если любая из авиакомпаний прекратит полёты, то можно будет из любого города добраться до любого другого (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

4. На Луне n городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города A в город B — как стоимость проезда из A в B по самому дешёвому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более $n - 1$ различных цен.

5. В стране ровно 100 городов и 199 двусторонних авиалиний. Из любого города можно добраться самолётами до любого другого. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, при закрытии всех авиалиний которого из любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.

6. Расстоянием от одной вершины до другой назовём минимальное количество рёбер в пути между этими двумя вершинами. Удаленность вершины — сумма расстояний от неё до всех вершин графа. Докажите, что если удалённость двух вершин дерева отличается на 1, то в дереве нечётное число вершин.

7. На клетчатой бумаге со стороной клетки, равной 1, нарисован многоугольник площади n. Его контур идёт по линиям сетки. Какой наибольший периметр может иметь этот многоугольник?

Симметрия

1. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC.

2. Дана M-образная ломаная $ABCDE$. Известно, что $AB = BC = CD = DE$, $\angle ABC = \angle CDE$, K — середина BD. Докажите, что $AK = EK$.

3. Около прямолинейной железной дороги **(а)** по разную сторону **(б)** по одну сторону от неё расположены две деревни. В какой точке на железной дороге нужно построить станцию так, чтобы сумма расстояний до деревень была минимальной?

4. Точка C лежит внутри прямого угла AOB. Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.

5. Из точек A и B, лежащих на разных сторонах угла, восставлены перпендикуляры к сторонам, пересекающие биссектрису угла в точках C и D . Докажите, что середина отрезка CD равноудалена от точек A и B.

6. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки P и Q такие, что $BA = AP$ и $CB = CQ$. Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что треугольник IPQ равнобедренный.

7. В треугольнике ABC равны стороны AB и BC, а угол B равен $20°$. Докажите, что **(а)** $AB < 3AC$; **(б)** $AB > 2AC$.

8. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. На лучах AB и CB отложены отрезки AX и CY, равные стороне AC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

9. Внутри острого угла XOY взяты точки M и N, причём $\angle XON = \angle YOM$. На луче OX отмечена точка Q так, что $\angle NQO = \angle MQX$, а на луче OY — точка P так, что $\angle NPO = \angle MPY$. Докажите, что длины ломаных MPN и MQN равны.

10. Дан выпуклый шестиугольник $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, все стороны которого равны. Каждую его вершину отразили симметрично относительно прямой, проходящей через две соседние вершины. Полученные точки обозначили через P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5, P'_6 соответственно. Докажите, что $\triangle P'_1P'_3P'_5 = \triangle P'_4P'_6P'_2$.

Деревья и подвешивание за вершину

1. В группе людей каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.

2. В связном графе есть вершина степени n. Докажите, что в этом графе можно выделить n вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.

3. Дан связный граф с 1000 вершинами. Докажите, что можно выкинуть часть ребёр так, чтобы у всех оставшихся вершин была бы нечётная степень.

4. В стране 2000 городов, и в каждом живёт по королю. Города соединены дорогами так, что из любого города в любой можно проехать по этим дорогам. Докажите, что короли могут совершить переезд, проехав по одной или двум дорогам каждый так, чтобы после переезда каждый король оказался в другом городе и в каждом городе находилось по королю.

5. Рёбра дерева изначально окрашены в два цвета. Если в какую-то вершину приходят рёбра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Обязательно ли можно все ребра исходного дерева сделать одноцветным?

6. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что если граф, образованный городами и дорогами, — дерево, то Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася.

Ещё симметрия

1. В треугольнике ABC угол A равен $60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке B_1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке C_1. Докажите, что расстояния от точки пересечения биссектрис треугольника ABC до прямых BC и B_1C_1 равны.

2. BL — биссектриса треугольника ABC, в котором $\angle C = 3\angle A$. На стороне AB отмечена точка M, а на стороне AC — точка N такие, что $\angle AML = \angle ANM = \angle 90°$. Докажите, что $BM + 2MN > BL + LM$.

3. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки K и L так, что L — середина отрезка AK, BK — биссектриса угла LBC и $BC = 2BL$. Докажите, что $\angle ACB = \angle ABL$.

4. Дан треугольник ABC. M — середина стороны BC, а P — проекция вершины B на серединный перпендикуляр к AC. Прямая PM пересекает сторону AB в точке Q. Докажите, что треугольник QPB равнобедренный.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы B и D равны, $CD = 4BC$, а биссектриса угла A проходит через середину стороны CD. Чему равно отношение $AB\colon AD$?

6. Дан равнобедренный треугольник ABC, углы при основании BC которого равны $80°$. Точки D и E на сторонах AC и AB соответственно таковы, что $\angle CBD = 60°$ и $\angle BCE = 50°$. Найдите $\angle EDB$.

Дополнительные построения

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Кроме того, внутри него существует такая точка O, что $AO = OD$ и $BO = CO$. Докажите, что диагонали четырехугольника равны.

2. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями длины AB и BC, стороны которого равны AM, BM, CM, DM.

3. На биссектрисе внешнего угла при вершине C треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $AC + CB < AM + MB$.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$ причём $AB < BC$ и $AD < DC$. Точка M лежит на диагонали BD. Докажите, что $AM < MC$.

5. Точки E и F расположены на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ так, что $\angle AED = \angle DEF$. Докажите, что $EF = AE + FC$.

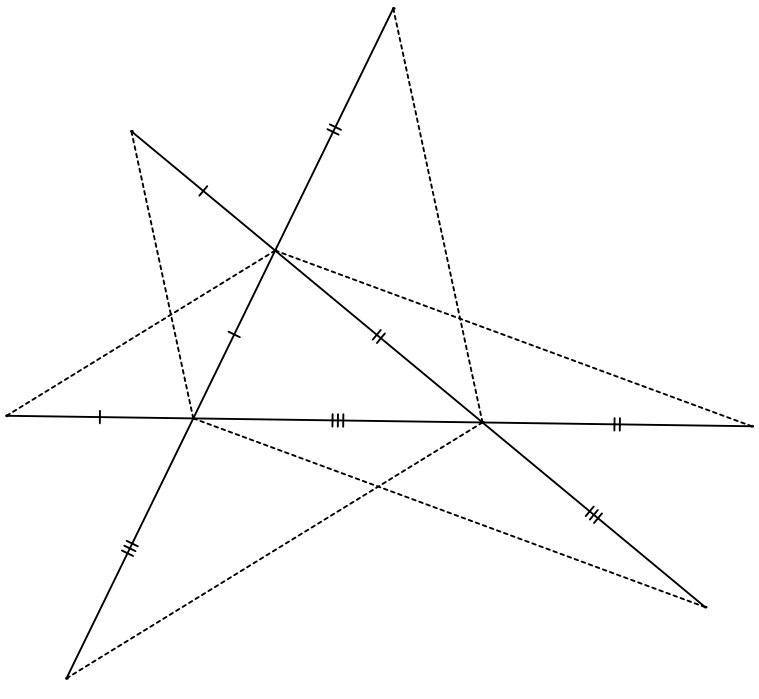
6. Докажите, что из трех медиан треугольника можно составить треугольник.

7. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны точки K и L так, что $AK = BL$, а на стороне AC — точки M и N так, что $AM = NC$. Докажите, что $KM + NL \geqslant BC$.

8. В треугольнике ABC провели медиану CD. Известно, что $\angle ADC = 45^\circ$ и $\angle DCB = 15^\circ$. Найдите угол ACD.

9. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. Пусть ℓ — прямая, проходящая через середины BC и AD. Докажите, что ℓ пересекает прямые AB и CD под равными углами.

10. Докажите, что в шестиугольнике, образованном пунктирными прямыми, все пары противоположных сторон равны и параллельны.



Двудольные графы

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что любое ребро соединяет вершины разного цвета.

Утверждение. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в нём имеют чётную длину.

1. На шахматной доске стоит несколько коней. Каждый конь на белом поле бьет 3 коня, а каждый конь на чёрном поле бьет 4 коня. Докажите, что общее число коней кратно семи.

2. В чемпионате России по футболу играют 16 команд. В первом туре все команды сыграли по одной игре. Во втором туре также все команды сыграли по игре. Докажите, что можно указать такие 8 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

3. На плоскости даны 2021 точка. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причём один и тот же отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечётным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?

4. Алиса записала в каждой вершине связного графа число. Потом пришла Даша, записала на каждом ребре сумму чисел в вершинах и стёрла числа Алисы. Для каких графов Артём Олегович гарантированно сможет восстановить числа, написанные Алисы?

5. В компании из 100 человек у каждого ровно 3 друга. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди любых k из них обязательно найдётся пара друзей?

6. Выписаны первые 1000 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

7. На клетчатой доске 9×9 отмечено 18 клеток так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

Делители

1. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель в три раза больше самого маленького.

2. Число назовём хорошим, если оно меньше суммы трёх своих наибольших делителей, отличных от него самого (и при этом все эти делители у него имеются). Какое наименьшее положительное значение может принимать разность двух хороших чисел?

3. d_k - наибольший делитель числа n, d_1 - наименьший, больший одного. Найдите все такие n, что: $d_1 \cdot d_2 + d_2 \cdot d_{k-3} = n$

4. У натурального числа n ровно 1000 натуральных делителей (включая 1 и само n). Эти 1000 делителей выписали в порядке возрастания. Оказалось, что любые два соседних делителя имеют разную чётность. Докажите, что в числе n более 150 цифр.

5. Докажите, что сумма квадратов делителей натурального числа, меньших его, меньше квадрата этого числа.

6. Для каждого натурального $n > 1$ обозначим через d_n наибольший его делитель, меньший самого числа n. Докажите, что для бесконечно многих n число $d_n + d_{n+1}$ является точным квадратом.

7. Натуральное число $n > 1$ таково, что для любого натурального делителя d числа n число $n^2 + n + 1$ делится на число $d^2 + d + 1$. Докажите, что n или простое число, или квадрат простого числа.

8. Найти все нечётные натуральные n для любых взаимно простых делителей a и b числа n число $a + b - 1$ также делитель числа n.

9. Дано чётное число N. Посчитаем два числа – сумму всех чётных делителей N и сумму всех нечётных делителей N. Может ли произведение этих чисел быть точным квадратом?

Индукция

1. Докажите, что $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$.

2. На плоскости проведено $n > 2$ прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди получившихся областей есть хотя бы один треугольник.

3. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (где n — натуральное) возьмём наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Какое число получится?

4. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

5. Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску записывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел. Докажите, что сотое записанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.

6. Докажите, что для любого натурального n можно разбить квадрат со стороной 2^n без одной клетки на трёхклеточные уголки.

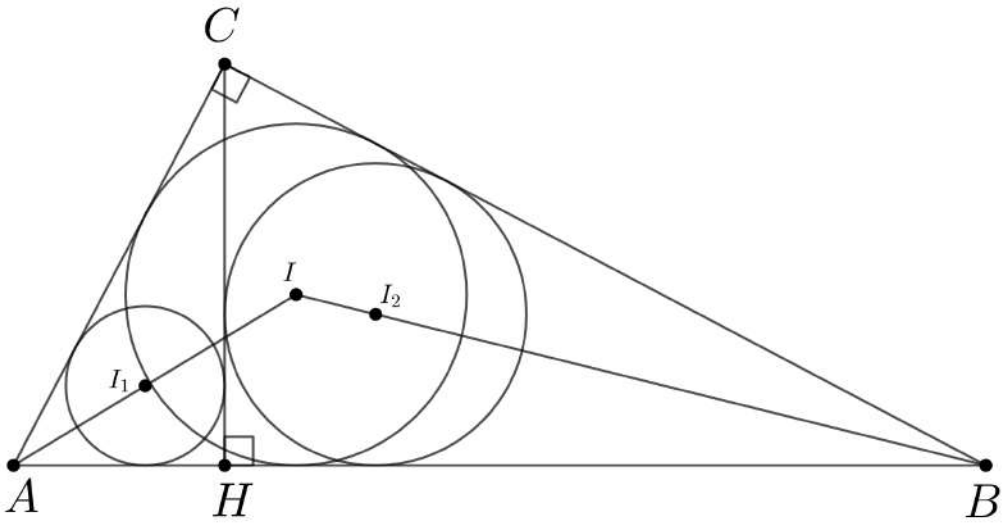
7. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — также целое при любом натуральном n.

8. В 2021 коробке, стоящих в ряд, лежит суммарно 20210 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 2020 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

9. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

10. $2m$-значное число назовём *справедливым*, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом $2m + 1$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым.

Внутри прямоугольного треугольника



В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведём высоту CH.

Обозначим через a, b, c, p стороны BC, AC, AB и полупериметр треугольника ABC.

r — радиус вписанной окружности треугольника ABC.

1. Докажите, что $r = p - c$.

2. r_1, r_2, r — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACH, BCH и ABC. Докажите, что $r_1 + r_2 + r = CH$.

В треугольниках ACH и BCH проведём биссектрисы CT_1 и CT_2.

3. Докажите, что **(а)** $AT_2 = AC, BT_1 = BC$; **(б)** $T_1T_2 = 2r$.

Точки I_1, I_2, I — инцентры треугольников ACH, BCH и ABC соответственно.

4. Докажите, что **(а)** I — ортоцентр треугольника CI_1I_2; **(б)** Прямая I_1I_2 пересекает катеты под углом $45°$.

5. Докажите, что $T_1I_2 \perp CT_2$ и $T_2I_1 \perp CT_1$.

6. Найдите углы треугольника T_1IT_2.

Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках X, Y, Z.

7. Докажите, что точки I, I_1, I_2, T_1, T_2 лежат на одной окружности с центром Z.

8. Докажите, что точки I_1 и I_2 являются ортоцентрами треугольников AYZ и BXZ соответственно.

9. Докажите, что отрезки XI_1, YI_2 и CZ пересекаются в одной точке.

10. Вторая внешняя касательная к окружностям, вписанным в треугольники ACH и BCH, пересекает CH в точке K. Докажите, что $CK = r$.

11. Докажите, что ортоцентр треугольника XYZ лежит на отрезке CH.

Делимость

Ну пары все-таки называются алгебра

1. Может ли НОК двух чисел равняться их сумме?

2. Для каких m может натуральное число, делящееся на число состоящие из m , иметь сумму цифр меньше m?

3. Наидите все пары натуральных чисел x и y, для которых $x \cdot y^2 + 7$ делится на $x^2 \cdot y + x$.

4. Числа a и b взаимно просты. Известно что $a^2 + b^2$ делится на $a + b^2$. Найдите a и b.

5. Даны натуральные числа a и b. Известно, что $a^2 + b^2$ делится на ab. Докажите, что $a = b$.

6. Числа a и b два подряд идущих делителя числа n. Известно, что $a^2 + b = n$. Найти n.

Полуинварианты

На разбор

1. В десяти коробках, стоящих в ряд, находятся $1, 2, 3, ..., 10$ шариков. За один ход можно взять один шарик из любой коробки, кроме первой, и переложить его на одну коробку левее. Докажите, что такие ходы не могут продолжаться бесконечно.

2. По кругу стоит 100 фишек трёх цветов. Если оба соседа фишки одного цвета, а сама фишка – другого, то за ход её можно перекрасить в цвет соседей. Докажите, что можно будет сделать лишь конечное число таких ходов.

3. На доске записаны несколько ненулевых чисел. За один ход можно взять два числа a, b и заменить их на $a + \frac{b}{2}, b - \frac{a}{2}$. Докажите, что множество чисел на доске никогда не повторится.

Основные задачи

1. Сыщик гоняется за Шпионом по Архипелагу. Оба используют только маршрутные корабли, которые курсируют ежедневно между некоторыми островами. Каждый корабль отплывает утром и приплывает на остров назначения к вечеру без захода на другие острова. С пересадками можно добраться с любого острова на любой. Сыщик всегда знает, где сейчас Шпион, и поймает его, если окажется с ним на одном осторове. Сыщик может плыть в любой день, Шпион не плавает по пятницам. Как Сыщику поймать Шпиона?

2. В клетках таблицы 111×111 расставлены плюсы и минусы. Если в каком-то ряду (строке или столбце) минусов больше чем плюсов, разрешается в этом ряду поменять все знаки на противоположные. Докажите, что, рано или поздно, очередной ход будет сделать нельзя.

3. **(a)** В двух коробках лежат по 9 шариков. За один ход можно убрать из любой коробки 1 шарик или убрать 1 шарик из левой коробки и положить 9 шариков в правую. Докажите, что такие ходы не могут повторяться бесконечно.

(b) В нескольких коробках лежат шарики. За один ход можно переложить шарик из одной коробки в другую, если в ней шариков столько же или больше, чем в той, откуда перекладываем. Докажите, что все шары соберутся в одной коробке.

4. На доске написаны 100 натуральных чисел. За ход можно либо заменить два числа на их сумму, либо разложить число в произведение двух меньших различных чисел и заменить его на эти два числа. Докажите, что, рано или поздно, на доске останется одно число.

5. В парламенте у каждого депутата не более трёх врагов (вражда взаимна). Все депутаты состоят в одной из двух палат. Каждый день один депутат, у которого в его палате вместе с ним находятся, по крайней мере, двое его врагов, переходит в соседнюю палату. Докажите, что, рано или поздно, процесс переходов закончится.

6. На белой доске 10×10 Петя красит какие-то 9 квадратов в черный. Затем каждым ходом он может покрасить новый квадратик, если у этого квадратика есть, по крайней мере, два покрашенных соседа. Докажите, что Петя не сможет покрасить весь квадрат в черный цвет.

7. На доске написаны 20 различных натуральных чисел. За ход можно взять одно из крайних чисел (наибольшее или наименьшее) и заменить на среднее арифметическое $\left(\frac{a+b}{2}\right)$, геометрическое $(\sqrt{ab})$ или гармоническое $\left(\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)$ его с каким-то другим из чисел (при условии, что это среднее – натурально, и все числа остаются различными). Докажите, что удастся сделать лишь конечное число ходов.

8. У вас есть перетасованная колода карт с номерами от 1 до n. Всякий раз, когда верхней картой оказывается карта с номером k, вы снимаете k верхних карт и кладете их сверху в обратном порядке. Докажите, что, рано или поздно, верхней картой окажется карта с номером 1.

Добавка. Разнобойная

Разнобой это прекрасно.

1. Может ли НОК трёх чисел равняться их сумме?

2. Наименьшее общее кратное скольки чисел может равняться их сумме?

3. Пусть p простое число. Найдите возможные НОД чисел $\frac{a^p+b^p}{a+b}$ и $a+b$

4. Целые числа и таковы, что $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=xyz$. Докажите, что $x^3+y^3+z^3$ делится на $x+y+z+6$.

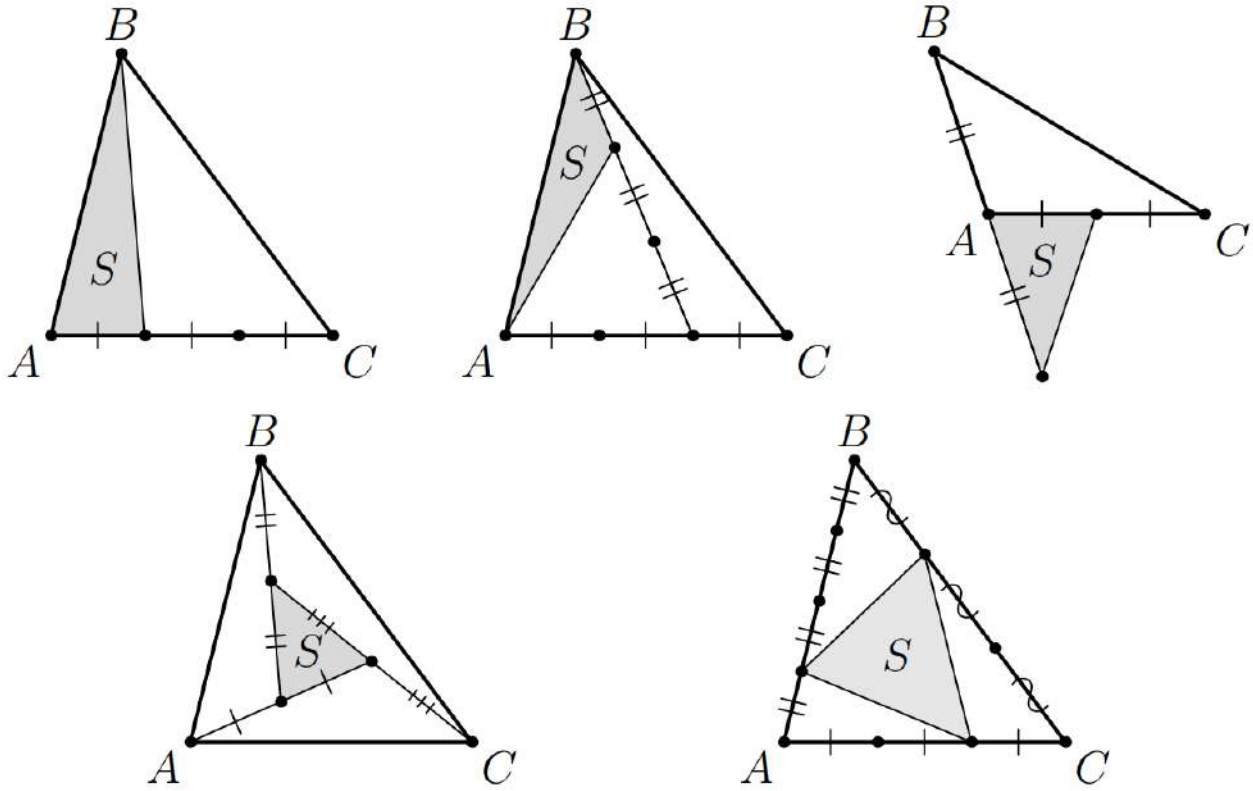
5. Найдите четвёрку натуральных чисел a, b, c, d таких, что $a<b<c<d$ и $a+b+c+d-3=ad=bc$.

Площади

Стоим

1. Пусть E и F – середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника,образованного прямыми AE, ED, BF и FC, если площадь $ABCD$ равна S.

2. Выразите площадь треугольника ABC через S.



3. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, расположенной внутри правильного треугольника, до его сторон не зависит от выбора точки.

Двигаем

4. **(Лемма о «крыльях бабочки».)** Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Докажите, что площади двух треугольников, прилегающих к ее боковым сторонам, равны. Сформулируйте обратное утверждение и докажите его.

5. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены прямые, параллельные двум сторонам и пересекающие AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что $S_{CDE} = S_{BDF}$.

6. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в

точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

Думаем

7. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на 4 части, площади которых, взятые последовательно, равны S_1,S_2,S_3,S_4. Докажите, что $S_1 \cdot$ $\cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

8. **(a)** Найдите внутри треугольника ABC все такие точки P, что $S_{ABP} =$ $= S_{ACP}$.
(b) Найдите внутри треугольника ABC все такие точки Q, что выполняется равенство $S_{ABQ} : S_{BCQ} : S_{CAQ} = 1 : 2 : 3$.

9. На каждой стороне параллелограма взято по точке. Площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна стороне параллелограмма.

Специальные треугольники

30-120-30

1. **(a)** В треугольнике ABC с углом $B = 120^\circ$ на стороне AC отметили точки M и N так, что $AM = MN = NC = BM$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
(b) Точки M и N на стороне AC равнобедренного треугольника ABC, в котором $\angle B = 120^\circ$, таковы, что $AM = MN = NC$. Докажите, что треугольник BMN равносторонний.

2. В треугольнике ABC углы A и C равны 30°. На прямой, проходящей через точку A перпендикулярно AC, отметили точку K такую, что $BK = AC$. Чему может быть равен угол AKB?

3. Треугольник ABC – равнобедренный с углами при основании AC, равными 30°. Точка M – середина AB. Точка N симметрична M относительно AC. Прямые AC и NB пересекаются в точке P, а прямые PM и BC пересекаются в точке Q. Докажите, что $MQ = BN$.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 120^\circ$. На стороне AB отмечена такая точка P, что $BP = 2AP$. На стороне CB отмечена точка T такая, что $\angle CPT = 30^\circ$. Докажите, что $BT = 2CT$.

5. В треугольнике ABC отмечены середины сторон AC и BC – точки M и N соответственно. Угол MAN равен 15°, а угол BAN равен 45°. Найдите угол ABM.

20-40-120

6. В треугольнике ABC угол A равен 120°, угол B равен 40°, AD – биссектриса угла A этого треугольника. Докажите, что $BC = AC + AD$.

7. В треугольнике ABC угол A равен 120°, угол B равен 40°, AD – биссектриса угла A этого треугольника. На стороне AC отметили точку E такую, что $CE = BD$. Докажите, что $AD \perp BE$.

8. В треугольнике ABC углы A и B равны 40° и 20° соответственно. На стороне CB отмечена точка M такая, что $CM = CA$. На продолжении стороны AC за точку C отмечена точка P такая, что $\angle CMP = 40^\circ$. Найдите угол CBP.

9. В треугольнике ABC углы A и B равны 40° и 20° соответственно. На продолжении стороны AC за точку C отметили точку P такую, что $CP = AB - BC$. Найдите угол CBP.

20-80-80

10. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°. На стороне BC отметили точку K такую, что $BK = AC$. Найдите угол BAK.

11. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°. На стороне BC отметили точку K, а на стороне BA – точку L, причем $BK = AL = AC = x$. Докажите, что $KL = x$.

12. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°, AD – биссектриса угла A этого треугольника. Докажите, что $AD + AC = BD$.

13. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен 20°. На стороне BC отметили точку P такую, что $AC = 2CP$. CH – высота треугольника ABC. Найдите угол BHP.

Таблицы

1. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
2. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и -1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной.Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?
3. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?
4. Фигура кенгуру бьет 8 клеток, расположенных от нет на 2 или 3 клетки левее, правее, выше или ниже (а соседние клетки не бьет). Какое наибольшее число не бьющих друг друга кенгуру можно расставить на доске 8×8?
5. Назовем две клетки на шахматной доске *достижимыми* друг из друга, если из одной можно попасть в другую двумя ходами коня. Какое наибольшее число клеток можно выбрать так, чтобы любые две были достижимы друг из друга?
6. Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на каждой горизонтали, вертикали и диагонали (не только на главных) находилось чётное число фишек?
7. Фигура *калека* бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырёх (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга калек можно расставить на шахматной доске 8×8?

[Лицей «Вторая школа»] Овченков А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 7-2 *18 июля 2022 г.*

Таблицы

1. Какое наибольшее число королей можно поставить на шахматной доске так, чтобы никакие два из них не били друг друга?
2. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и -1. Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной.Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?
3. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?
4. Фигура кенгуру бьет 8 клеток, расположенных от нет на 2 или 3 клетки левее, правее, выше или ниже (а соседние клетки не бьет). Какое наибольшее число не бьющих друг друга кенгуру можно расставить на доске 8×8?
5. Назовем две клетки на шахматной доске *достижимыми* друг из друга, если из одной можно попасть в другую двумя ходами коня. Какое наибольшее число клеток можно выбрать так, чтобы любые две были достижимы друг из друга?
6. Какое наибольшее число фишек можно поставить на клетки шахматной доски так, чтобы на каждой горизонтали, вертикали и диагонали (не только на главных) находилось чётное число фишек?
7. Фигура *калека* бьёт как слон (по диагоналям), но только в трёх направлениях из четырёх (отсутствующее направление может быть разным для разных мамонтов). Какое наибольшее число не бьющих друг друга калек можно расставить на шахматной доске 8×8?

Уравнения и целые числа

1. Решите линейные сравнения
(a) $50x \equiv 3 \pmod{37}$ **(b)** $13x \equiv 1 \pmod{48}$

2. Решите линейные уравнение в целых числах
(a) $71x + 17y = 7$ **(b)** $1990x - 173y = 11$

3. Точка блуждает по целым точкам прямой и вначале имеет координату 0. Каждую минуту она прыгает либо на 37 влево, либо на 47 вправо. За какое наименьшее время точка сможет оказаться в положении с координатой 1?

4. Найдите две обыкновенные дроби – одну со знаменателем 8, другую со знаменателем 13, чтобы они не были равны, но разность между большей и меньшей была как можно меньше.

5. Найдите все решения в целых числах уравнений
(a) $xy + x - 3y = 4$ **(b)** $1/x - 1/y = 1/11$

6. Найдите все решения в целых числах уравнений
(a) $x^3 + 3 = 4y(y + 1)$ **(b)** $2^n + 7 = x^2$

7. Найдите все натуральные числа, делящиеся на 30, и имеющие ровно 30 различных натуральных делителей.

8. Курс акций некоторой компании каждый день менялся (повышался или понижался) на $n\%$, где n – фиксированное натуральное число, меньшее 100. Существует ли такое n, что курс акций через некоторое время стал таким же, каким был вначале?

9. Натуральные числа m, n – взаимно просты. Дробь

$$\frac{m + 2000n}{n + 2000m}$$

можно сократить на число d. Найдите наибольшее возможное значение d.

Геометрическое место точек

Определение. Геометрическое место точек(сокращенно *ГМТ* или *locus*), обладающих некоторым свойством – множество всех точек плоскости, которые удовлетворяют данному условию.

Базовые примеры.
(a) серединный перпендикуляр к отрезку – ГМТ равноудаленных от концов отрезка;
(b) биссектриса – ГМТ, равноудаленных от сторон угла;
(c) окружность – ГМТ, находящихся на фиксированном расстоянии от центра окружности.
(d) полуокружность – ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

1. Дан отрезок AC. Найдите локус точек B таких, что:
   (a) $AB + BC = AC$;
   (b) $AB < BC$;
   (c) один из отрезков AB или BC короче AC;
   (d) высота из вершины B равна h;
   (e) треугольник ABC равнобедренный;
   (f) треугольник ABC остроугольный;
   (g) треугольник ABC тупоугольный;
   (h) $\angle$ A – второй по величине в треугольнике ABC.

2. Докажите, что в остроугольном треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой.

3. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ X таких, что

$$\rho(X, AB) + \rho(X, CD) = \rho(X, BC) + \rho(X, AD),$$

   где $\rho(X, l)$ – расстояние от точки X до прямой l.

4. **(a)** Отрезок фиксированной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла. Найдите ГМТ середин этого отрезка.
   (b) По окружности бегают точки A и B так, что отрезок AB всегда проходит через фиксированную точку M. Найдите ГМТ середин AB.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась такая точка P, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

[Лицей «Вторая школа»] Овченков А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 7-2 *19 июля 2022 г.*

Геометрическое место точек

Определение. Геометрическое место точек(сокращенно *ГМТ* или *locus*), обладающих некоторым свойством – множество всех точек плоскости, которые удовлетворяют данному условию.

Базовые примеры.
(a) серединный перпендикуляр к отрезку – ГМТ равноудаленных от концов отрезка;
(b) биссектриса – ГМТ, равноудаленных от сторон угла;
(c) окружность – ГМТ, находящихся на фиксированном расстоянии от центра окружности.
(d) полуокружность – ГМТ, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

1. Дан отрезок AC. Найдите локус точек B таких, что:
   (a) $AB + BC = AC$;
   (b) $AB < BC$;
   (c) один из отрезков AB или BC короче AC;
   (d) высота из вершины B равна h;
   (e) треугольник ABC равнобедренный;
   (f) треугольник ABC остроугольный;
   (g) треугольник ABC тупоугольный;
   (h) $\angle$ A – второй по величине в треугольнике ABC.

2. Докажите, что в остроугольном треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой.

3. Дан квадрат $ABCD$. Найдите ГМТ X таких, что

$$\rho(X, AB) + \rho(X, CD) = \rho(X, BC) + \rho(X, AD),$$

   где $\rho(X, l)$ – расстояние от точки X до прямой l.

4. **(a)** Отрезок фиксированной длины движется по плоскости так, что его концы скользят по сторонам прямого угла. Найдите ГМТ середин этого отрезка.
   (b) По окружности бегают точки A и B так, что отрезок AB всегда проходит через фиксированную точку M. Найдите ГМТ середин AB.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась такая точка P, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

Степень вхождения

Простые числа входят и выходят

1. На сколько нулей оканчивается число 100! ?

2. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится число $(n+1)(n+2)...(2n)$

3. Докажите, что $n!$ не делится на 2^n Пусть p— простое, и C_n^k делится на p^a. Докажите, что $n > p^a$

4. Числа от 1 до 12 разбили на 2 группы так, что произведение чисел в одной из них делится на другое. Чему равно наименьшее отношение этих произведений?

5. Какое максимальное количество натуральных чисел, не превосходящих 1000, можно выбрать так, чтобы произведение любых двух из них было полным квадратом?

6. Назовём натуральное число забавным, если все его простые делители меньше, чем 20 Докажите, что среди любых 400 забавных чисел найдутся два таких, что их произведение – полный квадрат.

7. Докажите, что для любого натурального m существует такое n, что 2 входит в разложение n! в степени, делящейся на m.

8. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

9. Натуральные числа $a, b, n > 1$ таковы,что $a^n + b^n$ делится на ab. Докажите, что a^{n-1} делится на b.

Неравенства

1. Найдите все натуральные числа m и n, для которых $|4m^2 - n^{n+1}| \leqslant 3$.

2. Для каждого числа от 1 до 1000 выписали все его натуральные делители (в результате некоторые числа выписаны много раз). Определите, что больше: сумма всех выписанных чисел или миллион?

3. Тройку чисел назовем хорошей, если существует n такое, что любое число из тройки увеличенное на N делится на произведение двух оставшихся. Найдите все хорошие тройки

4. Найдите все натуральные числа, представимые в виде $\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}$, где a, b, c — попарно взаимно простые натуральные числа.

5. Дано натуральное число $n > 2$. Все его делители упорядочили по возрастанию: $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$. Докажите, что $d_1d_2 + d_2d_3 + ... + d_{k-1}d_k$ меньше n^2

6. Можно ли уместить два точных куба между соседними точными квадратами?

Группа 7-3

[Лицей «Вторая школа] Добряков А. Д.
[*ЛМШ-2022*] группа: 7-3 *6 июля 2022 г.*

Комбинаторика-1

1. Сколько имеется двузначных чисел, у которых **(a)** цифра десятков меньше цифры единиц? **(b)** цифра десятков больше цифры единиц?

2. Можно раскрасить грани куба либо все в белый цвет, либо все в черный, либо часть в белый и часть в черный. Сколько существует различных способов окраски? (Два куба считаются раскрашенными различно, если их нельзя перепутать, как бы они не поворачивались.)

3. Имеется доска 50×70 клеток и плитка 15×20. Скольким количеством различных способов эту плитку можно положить на данную доску "клетку над клеткой"?

4. Сколько различных натуральных $n \leq 10^{12}$ таких, что $\text{НОК}(16, n) = 16n$?

5. Сколько целых чисел от 378 до 2433 имеют сумму цифр, делящуюся на 5?

6. Сколько одночленов окажется в многочлене

$$(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + ... + x^{40})(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + ... + x^{40})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых?

7. Найдите количество пар целых чисел (m, n), для которых выполнено равенство $n^2 + 2^{2022} = m^2$.

8. Сколько семибуквенных слов можно составить из букв a и b так, чтобы после буквы a стояла хотя бы одна буква b? (Букве a разрешается быть последней.)

9. Первоклассница Маша, заходя в школу, каждый раз поднимается на школьное крыльцо по лестнице, имеющей 9 ступенек. Находясь внизу лестницы или на очередной её ступеньке, она может либо подняться на следующую ступеньку, либо перепрыгнуть через одну ступеньку вверх, либо через две ступеньки (перепрыгнуть через три или более ступенек Маша пока не может). Какое минимальное количество раз Маше нужно зайти в школу, чтобы подняться на крыльцо всеми возможными способами?

10. В алфавите жителей сказочной планеты АБ2022 всего две буквы: буква А и буква Б. Все слова начинаются на букву А и заканчиваются тоже на букву А. В любом слове буква А не может соседствовать с другой буквой А. Также не может идти подряд больше, чем две буквы Б. Например, слова АББА, АБАБАБА, АББАБАББА являются допустимыми, а слова АББАБ, АБААБА, АБАБББА — нет. Сколько 22-буквенных слов в словаре этой планеты?

Преобразования

На разбор

1. Числа a и b таковы, что сумма $a+b$ и $3a+2b$ положительны. Может ли быть отрицательным число $5a+4b$? А $4a+5b$?

2. Три пирата вечером поделили добытые за день бриллианты: по двенадцать Биллу и Сэму, а остальные — Джону, который считать не умел. Ночью Билл у Сэма, Сэм у Джона, а Джон у Билла украли по одному бриллианту. В результате средняя масса бриллиантов у Билла уменьшилась на один карат, у Сэма уменьшилась на два карата, зато у Джона увеличилась на четыре карата. Сколько бриллиантов досталось Джону?

3. Различные числа a и b удовлетворяют равенству $a^2+b=b^2+a$. Найдите их сумму.

4. Докажите, что если $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$, то $a=b=c$.

Основные задачи

1. Про числа a, b известно, что $\dfrac{1}{3a}+\dfrac{2}{3b}=\dfrac{3}{a+2b}$. Обязательно ли $a=b$?

2. Про различные числа a и b известно, что $\dfrac{a}{b}+a=\dfrac{b}{a}+b$. Найдите $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$.

3. В примере с дробями некоторые двузначные натуральные числа заменили буквами A и B:

$$\frac{A-5}{A}+\frac{4}{B}=1$$

(a) Найдите наименьшее возможное значение A;
(b) Найдите наибольшее возможное значение B.

4. Числа a и b таковы, что $a+b=1$. Докажите, что $(1-a^2)^2+(1-b^2)^2 \geqslant 1$ и найдите все пары (a, b), при которых достигается равенство.

5. Про числа a, b, c известно, что $a^2+b=b^2+c=c^2+a$. Докажите, что

$$a(a^2-b^2)+b(b^2-c^2)+c(c^2-a^2)=0.$$

6. В парке было две тусовки – бумеров и зумеров (других людей в парке не было). Средний возраст зумеров 22 года, а средний возраст бумеров – 45 лет. Однажды один из бумеров решил, что он зумер, и переметнулся в другую тусовку. В результате средний возраст как бумеров, так и зумеров увеличился ровно на 1 год. Сколько всего людей в парке?

7. Известно, что $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$. Докажите, что:

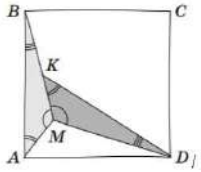
$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$$

8. В каждой вершине куба записали по одному числу, все числа различны. Если число равно сумме трёх чисел, записанных в соседних с ним вершинах, то оно называется компанейским. Какое наибольшее количество компанейских чисел может быть среди записанных?

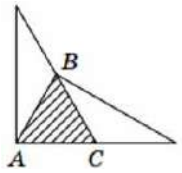
9.* Даны натуральные числа $a > b$ и $c > d$. Докажите, что если $a+b+c+d = ab - cd$, то число $a + c$ составное.

Равенство бумажных треугольников

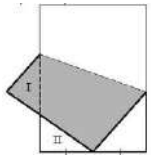
1. Из бумаги вырезали два равных треугольника и расположили внутри квадрата, как показано на рисунке. Найдите их углы.



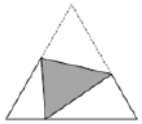
2. Два одинаковых прямоугольных треугольника из бумаги удалось положить один на другой так, как показано на рисунке (при этом вершина прямого угла одного попала на сторону другого). Докажите, что заштрихованный треугольник равносторонний.



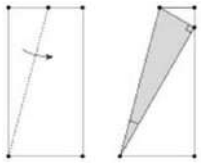
3. Прямоугольный лист бумаги согнули, совместив вершину с серединой противоположной короткой стороны. Оказалось, что треугольники I и II равны. Найдите длинную сторону прямоугольника, если короткая равна 8.



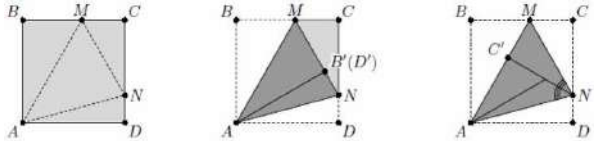
4. Бумажный равносторонний треугольник перегнули по прямой так, что одна из вершин попала на противоположную сторону (см. рисунок). Докажите, что углы двух белых треугольников соответственно равны.



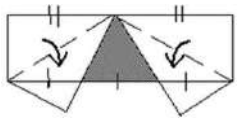
5. Квадратный лист бумаги сначала сложили вдвое, а затем так, как показано на рисунке. Чему равен отмеченный угол?



6. Из квадратного листа бумаги сложили треугольник (см. рисунки). Найдите отмеченный угол.



7. Два угла прямоугольного листа бумаги согнули так, как показано на рисунке. Противоположная сторона при этом оказалась разделенной на три равные части. Докажите, что закрашенный треугольник – равносторонний.



8. Имеются два равных фанерных треугольника, в которых отмечен один из углов. Расположите их на плоскости так, чтобы какие-то три их вершины образовали угол, равный половине отмеченного.

Разминка на углах

1. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = \alpha$, I и H – центр вписанной окружности и ортоцентр соответственно. Выразите через α углы BIC и BHC.

2. В треугольнике ABC угол C в три раза больше угла A. На стороне AB взята такая точка D, что $BD = BC$. Найдите CD, если $AD = 4$.

3. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AN, высота BH и серединый перпендикуляр к стороне AB пересекаются в одной точке. Найдите угол BAC.

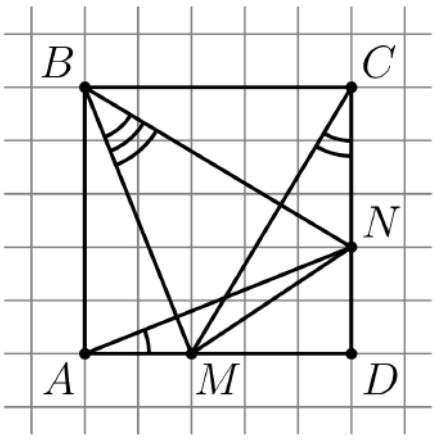
4. В треугольнике ABC точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA и AB соответственно. Известно, что $\angle AC'B' = \angle B'A'C$, $\angle CB'A' = \angle A'C'B$, $\angle BA'C' = \angle C'B'A$. Докажите, что точки A', B', C' — середины сторон треугольника ABC.

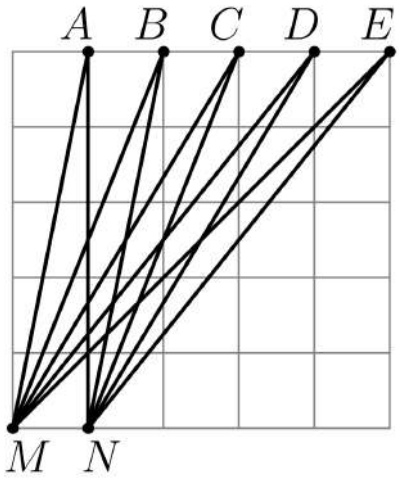
5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с углом при основании $72°$. На отрезке BC отмечена точка K так, что $BK = AC$. Докажите, что K – основание биссектрисы $\angle BAC$.

6. Биссектриса BD треугольника ABC отсекает от него равнобедренный треугольник BCD, а биссектриса CE отсекает от ABC тупоугольный равнобедренный треугольник ACE. Найдите углы треугольника ABC.

7. (a) От квадрата $ABCD$ отрезали прямоугольный треугольник MND. Найдите сумму трех углов, под которыми из вершин A, B и C видна его гипотенуза.

(b) Найдите сумму пяти углов: MAN, MBN, MCN, MDN, MEN.





MK. Задача 6 из листика 7-1.

Принцип крайнего и упорядочивание

0. Даны 5 чисел, сумма любых двух меньше суммы оставшихся трех. Докажите, что все числа положительны.

1. На шахматной доске отмечено несколько клеток таким образом, что если на них поставить коней, то каждый конь будет бить не менее трёх других коней. Докажите, что если на отмеченные клетки поставить королей, то какой-то из них будет бить другого.

2. На доске записаны 10 чисел. Оказалось, что сумма любых двух написанных чисел также написана на доске. Сколько максимум может быть написано чисел, не равных нулю?

3. Король выдал мудрецу 20 гирь с подписанной массой (массы всех гирь различны), двухчашечные весы и велел класть эти гири по одной на чашки весов так, чтобы после каждой новой гири чаша весов склонялась в другую сторону. Помогите мудрецу справиться с заданием.

4. Торт разрезан на 7 разных кусков. Всегда ли можно дополнительно разрезать один из кусков на две части таким образом, чтобы полученные 8 кусков можно было разложить на две тарелки равной массы по 4 куска на каждой?

5. У генерала в подчинении 9 солдат, у всех разный рост и разный возраст. Всегда ли генерал сможет построить этих солдат в виде квадрата 3×3 так, чтобы любой солдат был ниже солдата, который находится перед ним, и младше солдата, который справа от него?

6. В алфавите племени «Искра» 5 букв: А, И, К, Р, С, но их порядок отличается от принятого в русском языке. Словом считается любая последовательность из пяти букв, в которой каждая буква встречается ровно один раз. В словаре первым словом оказалось АРКИС. Какое слово в этом словаре идет перед словом КРСАИ?

7. На столе лежат несколько камней. Известно, что есть хотя бы 4 камня разного веса, и что любые два камня можно уравновесить какими-то другими двумя камнями на этом столе. Какое наименьшее число камней может быть на столе?

8. На доске написаны 5 натуральных чисел. Оказалось, что сумма любых трех из них делится на каждое из остальных. Докажите, что среди этих чисел найдутся четыре равных.

9. Существуют ли 12 различных натуральных чисел, у которых НОД меньше среднего арифметического ровно в 6 раз?

Сравнения по модулю

1. Докажите, что **(a)** $16^{2014} + 33^{2015}$ делится на 17; **(b)** $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66.

2. Решите линейные сравнения:
(a) $17x \equiv 5 \pmod{23}$;
(b) $19x \equiv 7 \pmod{60}$.

3. a, b, c — натуральные числа, причем $a + b + c$ делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

4. a и b — натуральные числа, причем число $a^2 + b^2$ делится на 21. Докажите, что оно делится и на 441.

5. Сколько существует натуральных n, меньших 10000, для которых $2^n - n^2$ делится на 7?

6. Найдите остаток от деления числа $10^{10} + 10^{100} + 10^{1000} ... + 10^{10000000000}$ на 7.

7. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при любом натуральном n.

8. Прямоугольный треугольник называется пифагоровым, если длины всех его сторон — натуральные числа. Для любого прямоугольного треугольника выполнена теорема Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Найдите наибольшее целое число, на которое делится произведение длин сторон любого пифагорова треугольника.

9. Можно ли представить число 11^{2018} в виде суммы двух кубов натуральных чисел?

10. Существуют ли 19 таких попарно различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр, что их сумма равна 1999?

11. Известно, что выражение $10n^3 - 3n^5 + 7an$ делится на 15 при всех целых n. Какие остатки может давать число a при делении на 15?

Преобразования - 2

1. Антон, Боря, Вася и Гриша каждый придумали по одному ненулевому числу. Затем каждый мальчик умножил своё число на сумму трех остальных. С удивлением, мальчики обнаружили, что результаты у всех совпали. Докажите, что мальчики придумали одинаковые по модулю числа.

2. Найдите какие-нибудь четыре попарно различных натуральных числа a, b, c, d, для которых числа $a^2 - 2cd + b^2$ и $c^2 - 2ab + d^2$ являются полными квадратами.

3. Известно, что $m + n = 4$ и $m + n + m^2n + n^2m = 17$. Найдите $m^3 + n^3$.

4. Про числа a, b, c известно, что $a(b - c) = b(c - a) = c(a - b)$. Докажите, что какие-то из a, b, c равны между собой.

5. Сумма четырех целых чисел равна 0. Числа расставили по кругу и каждое умножили на сумму двух его соседей. Докажите, что сумма этих четырех произведений, умноженная на -1, равна удвоенному квадрату целого числа.

6. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $a^2(b+c-a) = b^2(c+a-b) = c^2(a+b-c)$. Докажите, что $a = b = c$.

7. Числа a, b, c и d таковы, что $a + b = c + d \neq 0$, $ac = bd$. Докажите, что $a + c = b + d$.

8. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

9. Числа a, b не равны нулю. Известно, что $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} = 0$. Найдите возможные значения выражения:

$$a + b - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

[Лицей «Вторая школа] Добряков А. Д.
[*ЛМШ-2022*] группа: 7-3 *8 июля 2022 г.*

Комбинаторика-2

1. Сколькими различными способами шахматный король может пройти с поля $e1$ на поле $h5$, если ему разрешается ходить только на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо вверх?

2. Сколькими различными способами шахматный ферзь может пройти с поля $d1$ на поле $h8$, если ему разрешается ходить только вправо, вверх или по диагонали вправо вверх на любое число клеток?

3. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна единица?

4. Два натуральных числа назовём близкими взаимно простыми, если они взаимно простые и различаются не больше чем на 3. Найдите количество пар близких взаимно простых чисел, расположеных между 50 и 150 включительно.

5. В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Сколькими способами можно составить четыре смешанные пары? Для турнира важен порядок пар.

6. На школьном вечере присутствуют 12 девушек и 15 юношей. Сколькими способами можно выбрать из них четыре пары для танца?

7. Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из сторон этого 32-угольника?

8. Дан правильный 20-угольник. Найдите количество четвёрок вершин этого 20-угольника, являющихся вершинами трапеций.

9. Из трёх математиков и десяти экономистов нужно составить комиссию, в состав которой войдёт семь человек. При этом в ней должен участвовать хотя бы один математик. Сколькими способами может быть составлена комиссия?

10. 26 солдат выстроены в одну шеренгу. Сколько существует различных способов выбрать 11 из них так, что никакие двое из них не стоят рядом?

11. Компания из 10 супружеских пар разбивается на 5 групп по 4 человека для лодочной прогулки. Сколькими способами можно разбить их так, чтобы в каждой лодке оказались двое мужчин и двое женщин, при этом двое данных мужчин окажутся в одной лодке со своими женами?

12. Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих слов каждая буква используется ровно один раз?

Счет углов - 2

1. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно так, что лучи AM и AN делят угол BAD на три равные части. ME – высота треугольника MAN. Найдите угол EDN.

2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Известно, что $BL = AB$. На продолжении BL за точку L выбрана точка K, причём $\angle BAK + \angle BAL = 180°$. Докажите, что $BK = BC$.

3. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка K, а на стороне BC – точка L так, что $KB = LC$. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Докажите, что DP перпендикулярно KL.

Поймите, чем является точка P для $\triangle DKL$.

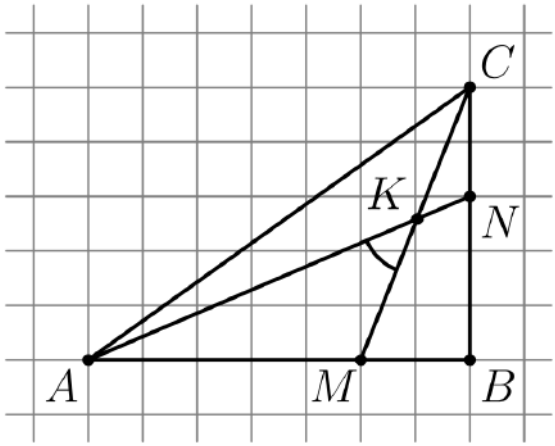
4. В четырехугольнике $ABCD$ углы B и C равны по $146°$. Биссектриса угла D пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке O. Найдите $\angle AOD$.

Найдите на картинке центр вписанной окружности.

5. Точка M – середина стороны BC треугольника ABC. Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.

Чтобы воспользоваться равенством, надо достроить отрезок, равный AK.

6. Найдите $\angle AKM$.



Постройте где-нибудь треугольник, равный $\triangle CBM$.

Медианы

1. В треугольнике ABC медиана BM в два раза меньше стороны AB и образует с ней угол $40°$. Найдите $\angle ABC$.

2. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу равна 1, один из острых углов равен $15°$. Найдите длину гипотенузы.

3. Два равнобедренных треугольника ABC и AED расположены так, как показано на рис. 1. Оказалось, что $\angle AEB + \angle ABE = \angle DAC$. Докажите, что $AK = \frac{1}{2}CD$, где K – середина EB.

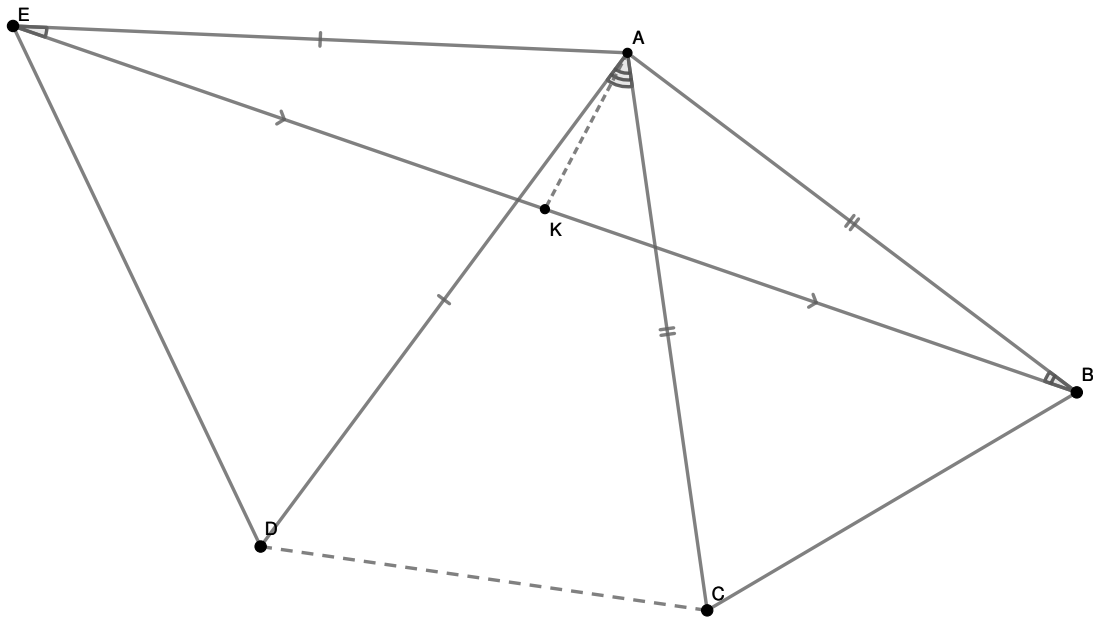


Рис. 1: Задача 3

4. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки K и L так, что L – середина отрезка AK, BK – биссектриса угла LBC и $BC = 2BL$. Докажите, что $AB = KC$.

5. Верно ли, что если в треугольнике равны две медианы, то он обязательно равнобедренный?

6. Найдите отношение $BE : EC$ (рис. 2).

7. M и N – середины сторон AB и AC треугольника ABC. На продолжении отрезка MN за точку N отмечена точка P, а на отрезке NP – точка

Q так, что $AP = BQ$, $CP = AQ$. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB, BC и CD равны, M – середина стороны AD. Известно, что угол BMC равен $90°$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$.

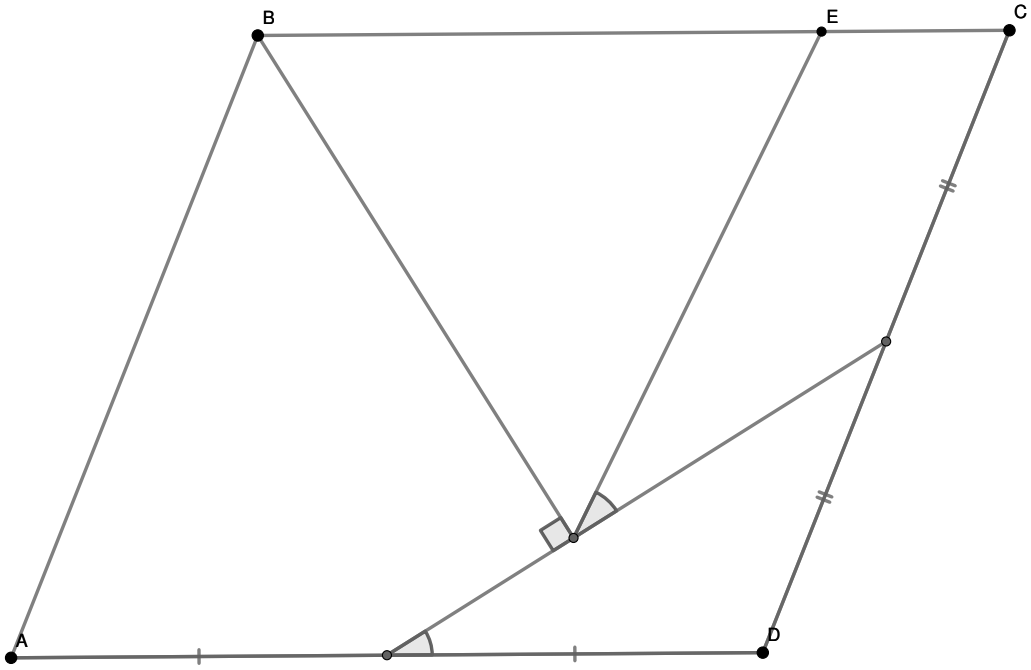


Рис. 2: Задача 6

Сравнения по модулю-2

1. Найти остаток $(116 + 17^{17})^{21} \cdot 7^{49}$ от деления на 8.

2. Доказать, что квадрат натурального числа не может оканчиваться на две нечётные цифры.

3. Известно, что $k = 2022^{2022} + 2$. Будут ли числа $k^3 + 1$ и $k^2 + 2$ взаимно простыми?

4. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Малая теорема Ферма

5. Докажите, что:
(a) $300^{3000} - 1$ делится на 1001.
(b) $7^{120} - 1$ делится на 143
(c) $30^{239} + 239^{30}$ — составное число.

6. $(a + b + c) \vdots 30$. Докажите, что $(a^5 + b^5 + c^5) \vdots 30$.

7. Известно, что $a^{16} + b^{16} + c^{16} + d^{16} + e^{16} + f^{16}$ делится на 17. Докажите, что $abcdef$ делится на 17^6.

Деревья

Определение 1. Связный граф без циклов называется *дерево*.

Определение 2. Часть графа содержащая все его вершины и являющаяся деревом называется *остовным деревом* или *скелетом*.

Свойство 1. В любом связном графе можно выделить остовное дерево.

Свойство 2. В дереве есть хотя бы две висячие вершины.

Свойство 3. В дереве на n вершинах ровно $n - 1$ ребро.

Свойство 4. В связном графе на n вершинах хотя бы $n - 1$ ребро.

1. Докажите, что из связного графа можно удалить вершину без потери связности.

2. В стране 15 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями, принадлежащими трём авиакомпаниям. Известно, что если любая из авиакомпаний прекратит полёты, то можно будет из любого города добраться до любого другого (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух компаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

3. Между любыми двумя соседними клетками шахматной доски лежит спичка. Какое наименьшее число спичек можно убрать, чтобы ладья могла попасть за несколько ходов из любой клетки в любую другую, не перескакивая через спички?

4. В стране ровно 100 городов и 199 двусторонних авиалиний. Из любого города можно добраться самолётами до любого другого. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, при закрытии всех авиалиний которого из любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.

5. В доску вбито 2022 гвоздя. Миша и Илья играют в игру, делая ходы по очереди. За ход можно соединить два еще не соединенных между собой гвоздя ниткой. Начинает Миша. Кто выиграет при правильной игре, если получивший замкнутую цепь **(а)** проигрывает; **(б)** выигрывает?

6. Клетки шахматной доски раскрашены в 20 цветов так, что клетки, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета, причём все 20 красок использованы. Две краски называются соседними, если существуют окрашенные ими соседние по стороне клетки. Чему равно наименьшее число пар соседних красок?

7. На Луне n городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города A в город B — как стоимость проезда из A в B по самому дешёвому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более $n - 1$ различных цен.

Отрезки и неравенства

1. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырехугольника больше суммы его противопожных сторон.

Запомните этот факт, он пригодится в одной из следующих задач.

2. Один из углов треугольника в два раза больше другого. Высота, опущенная из третьего угла, делит сторону на два отрезка. Докажите, что разность этих отрезков равна одной из сторон треугольника.

3. В треугольнике ABC провели биссектрису BE. Оказалось, что $BC+CE = AB$. Докажите, что один из углов треугольника в два раза больше другого.

4. Стороны треугольника равны a, b, c, причем угол напротив стороны a равен $120°$. Докажите, что из отрезков a, b, $b+c$ можно сложить треугольник.

5. Точка M – середина стороны AC треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки X и Y соответственно так, что $\angle XMY = 90°$. Докажите, что

$$AM - MX > CY - YX.$$

6. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка P. Через нее проводится отрезок KL (точка K лежит на отрезке AB, L – на CD) и MN (точка M лежит на отрезке BC, N – на AD) так, что $\angle BKP = \angle CMP = \angle BAD$. Докажите, что периметр четырехугольника $KMLN$ не меньше суммы диагоналей параллелограмма.

7. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки K и L (K лежит между A и L) так, что лучи BK и BL делят угол ABC на три равные части. Серединный перпендикуляр к стороне BC пересекает отрезок BL в точке M. Оказалось, что $ML + LC = AB$. Докажите, что $\angle MLC = 2\angle BAM$.

8. В треугольнике ABC проведена медиана AK. На стороне AC отмечена точка N так, что $AN - NC = AB$. Докажите, что угол AKN тупой.

9. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. Точка N – основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису угла ABC. Докажите, что $AB + AN > BC$.

Деревья и подвешивание за вершину

1. В группе людей каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.

2. В связном графе есть вершина степени n. Докажите, что в этом графе можно выделить n вершин так, чтобы при удалении любого набора из этих вершин, граф оставался связным.

3. Дан связный граф с 1000 вершинами. Докажите, что можно выкинуть часть ребёр так, чтобы у всех оставшихся вершин была бы нечётная степень.

4. В стране 2000 городов, и в каждом живёт по королю. Города соединены дорогами так, что из любого города в любой можно проехать по этим дорогам. Докажите, что короли могут совершить переезд, проехав по одной или двум дорогам каждый так, чтобы после переезда каждый король оказался в другом городе и в каждом городе находилось по королю.

5. Рёбра дерева изначально окрашены в два цвета. Если в какую-то вершину приходят рёбра только одного цвета, то их все можно перекрасить в другой цвет. Обязательно ли можно все ребра исходного дерева сделать одноцветным?

6. В виртуальном компьютерном государстве не менее двух городов. Некоторые пары городов соединены дорогой. Петя и Вася играют в такую игру. В начале игры Петя указывает на каждой дороге направление, в котором по ней можно двигаться, и помещает в один из городов туриста. Далее за ход Петя перемещает туриста по дороге в разрешённом направлении в соседний город, а Вася в ответ меняет направление одной из дорог, входящей или выходящей из города, куда попал турист. Вася победит, если в какой-то момент Петя не сможет сделать ход. Докажите, что если граф, образованный городами и дорогами, — дерево, то Петя может играть так, чтобы не проиграть, как бы ни играл Вася.

Индукция раз

1. У бородатого многоугольника Геннадия во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растёт щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы у одной из частей вся борода окажется снаружи.

2. Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали не обязательно угловую клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

3. На плоскости проведено $n > 2$ прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди получившихся областей есть хотя бы один треугольник.

4. Докажите, что $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

5. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (где n – натуральное) возьмём наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Какое число получится?

6. В 2021 коробке, стоящих в ряд, лежит суммарно 20210 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 2020 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

7. Колода карт выложена в ряд. Если две карты одной масти лежат рядом или через одну, то можно выбрасывать ту из них, которая левее. Кроме того, можно подкладывать справа любое количество карт из других колод. Докажите, что можно подкладывать и выбрасывать карты таким образом, чтобы в конце концов их осталось только четыре.

8. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ – также целое при любом натуральном n.

9. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

10. $2m$-значное число назовём *справедливым*, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом $2m+1$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым.

11. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

[Летняя школа Л2Ш] О. М. Мухаметов
[*июль 2022 г.*] группа: 7-3 *13 июля 2022*

Индукция раз

1. У бородатого многоугольника Геннадия во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растёт щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы у одной из частей вся борода окажется снаружи.

2. Из квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали не обязательно угловую клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток.

3. На плоскости проведено $n > 2$ прямых, никакие две из которых не параллельны, и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди получившихся областей есть хотя бы один треугольник.

4. Докажите, что $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

5. У каждого целого числа от $n+1$ до $2n$ включительно (где n – натуральное) возьмём наибольший нечётный делитель и сложим все эти делители. Какое число получится?

6. В 2021 коробке, стоящих в ряд, лежит суммарно 20210 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 2020 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

7. Колода карт выложена в ряд. Если две карты одной масти лежат рядом или через одну, то можно выбрасывать ту из них, которая левее. Кроме того, можно подкладывать справа любое количество карт из других колод. Докажите, что можно подкладывать и выбрасывать карты таким образом, чтобы в конце концов их осталось только четыре.

8. Известно, что $x + \frac{1}{x}$ – целое число. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ – также целое при любом натуральном n.

9. Докажите, что существует 100-значное число, делящееся на 2^{100}, в записи которого участвуют только цифры 1 и 2.

10. $2m$-значное число назовём *справедливым*, если его чётные разряды содержат столько же чётных цифр, сколько и нечётные. Докажите, что в любом $2m+1$-значном числе можно вычеркнуть одну из цифр так, чтобы полученное $2m$-значное число было справедливым.

11. Сколькими различными способами можно разбить лестницу высоты n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади попарно различны?

Двудольные графы

Граф называется *двудольным*, если его вершины можно раскрасить в два цвета так, что любое ребро соединяет вершины разного цвета.

Утверждение. Граф является двудольным тогда и только тогда, когда все циклы в нём имеют чётную длину.

1. На шахматной доске стоит несколько коней. Каждый конь на белом поле бьет 3 коня, а каждый конь на чёрном поле бьет 4 коня. Докажите, что общее число коней кратно семи.

2. В чемпионате России по футболу играют 16 команд. В первом туре все команды сыграли по одной игре. Во втором туре также все команды сыграли по игре. Докажите, что можно указать такие 8 команд, что никакие две из них не играли друг с другом.

3. На плоскости даны 2021 точка. Двое по очереди соединяют эти точки отрезками, причём один и тот же отрезок нельзя проводить дважды. Проигрывает тот, после хода которого впервые образуется замкнутая ломаная с нечётным числом звеньев. Кто выиграет при правильной игре?

4. Алиса записала в каждой вершине связного графа число. Потом пришла Даша, записала на каждом ребре сумму чисел в вершинах и стёрла числа Алисы. Для каких графов Артём Олегович гарантированно сможет восстановить числа, написанные Алисы?

5. В компании из 100 человек у каждого ровно 3 друга. При каком наименьшем k можно утверждать, что среди любых k из них обязательно найдётся пара друзей?

6. Выписаны первые 1000 натуральных чисел. Докажите, что их можно покрасить в два цвета так, чтобы отношение чисел одинакового цвета не было простым числом.

Симметрия

1. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC.

2. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC. Оказалось, что $\angle ABM = 2\angle BAM$, а $BC = 2BM$. Найдите углы треугольника.

3. Около прямолинейной железной дороги **(а)** по разную сторону **(б)** по одну сторону от неё расположены две деревни. В какой точке на железной дороге нужно построить станцию так, чтобы сумма расстояний до деревень была минимальной?

4. Точка C лежит внутри прямого угла AOB. Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.

5. **(а)** В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$) отметили точку M середину CD. Докажите, что $AM = BM$.

(б) Из точек A и B, лежащих на разных сторонах угла, восставлены перпендикуляры к сторонам, пересекающие биссектрису угла в точках C и D. Докажите, что середина отрезка CD равноудалена от точек A и B.

6. На стороне AC треугольника ABC выбрали точки P и Q такие, что $BA = AP$ и $CB = CQ$. Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что треугольник IPQ равнобедренный.

7. Две окружности радиуса R касаются в точке K. На одной из них взята точка A, на другой — точка B, причем $\angle AKB = 90°$. Докажите, что $AB = 2R$.

8. В треугольнике ABC равны стороны AB и BC, а угол B равен $20°$. Докажите, что **(а)** $AB < 3AC$; **(б)** $AB > 2AC$.

9. В треугольнике ABC угол B равен $60°$. На лучах AB и CB отложены отрезки AX и CY, равные стороне AC. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения биссектрис треугольника ABC.

Линейные функции

1. **(a)** Как расположена точка $A(13; 45)$ по отношению к прямой $y = 3x + 2$ (выше, ниже, лежит на ней)?
(b) Известно, что точка $B(3; 7)$ расположена выше прямых $y = ax + b$ и $y = cx + d$. А как точка B может быть расположена по отношению к прямой $y = \frac{1}{2}(a + c)x + \frac{1}{2}(b + d)$ (выше, ниже, лежит на ней, зависит от коэффициентов)?

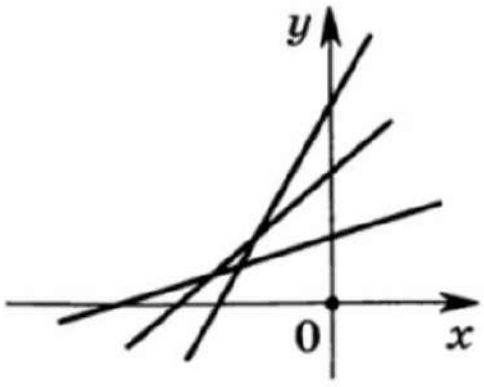
2. Про числа a и b известно, что $3a + 5b = -1$. Докажите, что все прямые $y = ax + b - 2$ проходят через одну точку.

3. Графики трех функций $y = ax + a, y = bx + b, y = cx + d$ имеют общую точку, причем $a \neq b$. Обязательно ли $c = d$?

4. Точки пересечения графиков четырех функций, заданных формулами $y = kx + b, y = kx - b, y = mx + b, y = mx - b$ являются вершинами четырехугольника. Найдите координаты точки пересечения его диагоналей.

5. Докажите теорему о высотах в треугольнике (три высоты пересекаются в одной точке), выбрав систему координат таким образом, чтобы все три вершины треугольника лежали на осях координат.

6. На координатной плоскости изображены прямые как на рисунке. Могут ли эти прямые быть графиками функций $y = ax + b, y = bx + c, y = cx + a$?



7. Числа a, b, c таковы, что прямые $y = ax + b, y = bx + c, y = cx + a$ проходят через одну точку. Докажите, что $a = b = c$.

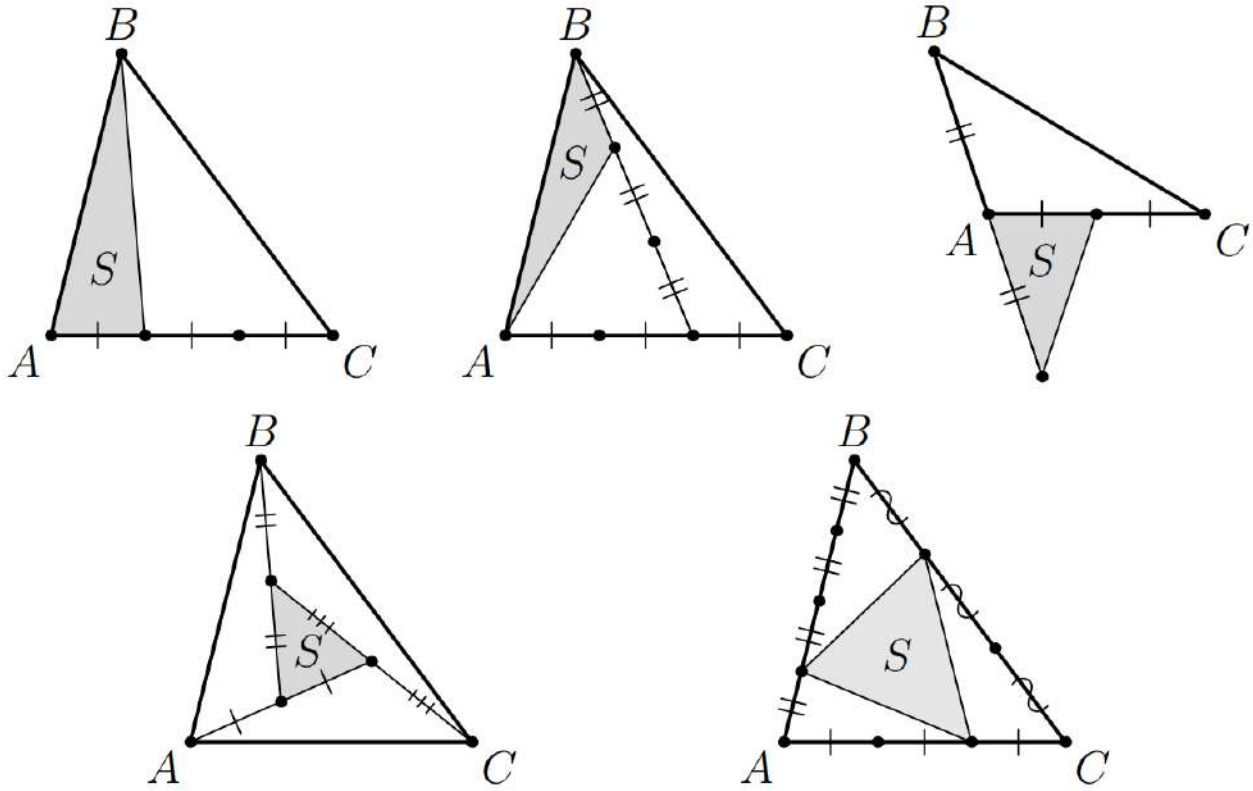
8. Два графика линейных функций пересекаются при $x = 2$. При $x = 8$ значения функций отличаются на 8. При $x = 20$ значение одной из функций равно 100. Чему может быть равно значение другой функции?

Площади

Стоим

1. Пусть E и F – середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Найдите площадь четырехугольника,образованного прямыми AE, ED, BF и FC, если площадь $ABCD$ равна S.

2. Выразите площадь треугольника ABC через S.



3. Докажите, что сумма расстояний от любой точки, расположенной внутри правильного треугольника, до его сторон не зависит от выбора точки.

4. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на 4 части, площади которых, взятые последовательно, равны S_1,S_2,S_3,S_4. Докажите, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Двигаем

5. **(Лемма о «крыльях бабочки».)** Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Докажите, что площади двух треугольников, прилегающих к ее боковым сторонам, равны. Сформулируйте обратное утверждение и докажите его.

6. Через точку D, лежащую на стороне BC треугольника ABC, проведены

прямые, параллельные двум сторонам и пересекающие AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что $S_{CDE} = S_{BDF}$.

7. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

Думаем

8. **(a)** Найдите внутри треугольника ABC все такие точки P, что $S_{ABP} = S_{ACP}$.

(b) Найдите внутри треугольника ABC все такие точки Q, что выполняется равенство $S_{ABQ} : S_{BCQ} : S_{CAQ} = 1 : 2 : 3$.

9. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$.Через середину G диагонали BD проведена прямая, параллельная диагонали AC, пересекающая сторону DC в точке H. Докажите, что отрезок AH делит площадь четырехугольника $ABCD$ пополам.

Двойной подсчёт

1. Для игры в Dungeons and Dragons часто используют двадцатигранную игральную кость d20 (см рис.), сумма противоположных граней которой равна 21. Чему может быть равна сумма на гранях столбика из пяти склеенных друг с другом d20?

2. Можно ли расставить по кругу 13 целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трёх расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трёх подряд расположенных – 2, . . . , каких-то трёх подряд расположенных – 13?

3. Можно ли занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

4. Во взводе 12 человек. В каждый из 150 дней какие-то пятеро назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 12 раз.

5. Треугольник разрезали на выпуклые четырёхугольники. Докажите, что хотя бы у одного четырёхугольника есть угол не меньше 120°.

6. Можно ли расставить на шахматной доске 8 попарно не бьющих друг друга ладей так, чтобы ровно 3 ладьи стояли на черных клетках?

7. В шеренгу выстроены 20 детей: 10 мальчиков и 10 девочек. Затем по очереди каждый мальчик сказал, сколько детей стоит слева от него, а каждая девочка сказала, сколько детей стоит справа от нее. Докажите, что сумма чисел, сказанных мальчиками, равна сумме чисел, сказанных девочками.

8. Есть кучка из 100 конфет. За ход можно взять какую-то кучку и разделить её на две кучки из $a > 0$ и $b > 0$ конфет. При этом на доску записывается число $a \cdot b$. Чему будет равна сумма всех выписанных чисел, когда ходы закончатся?

9.* В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу столбцов в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка.

[Летняя школа Л2Ш] Мухаметов О. М.
[*июль 2022 г.*] группа: 7-3 *18 июля 2022 г*

Двойной подсчёт

1. Для игры в Dungeons and Dragons часто используют двадцатигранную игральную кость d20 (см рис.), сумма противоположных граней которой равна 21. Чему может быть равна сумма на гранях столбика из пяти склеенных друг с другом d20?

2. Можно ли расставить по кругу 13 целых неотрицательных чисел так, чтобы сумма каких-то трёх расположенных подряд чисел была равна 1, каких-то трёх подряд расположенных – 2, . . . , каких-то трёх подряд расположенных – 13?

3. Можно ли занумеровать рёбра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров рёбер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

4. Во взводе 12 человек. В каждый из 150 дней какие-то пятеро назначались дежурными. Докажите, что какие-то двое были вместе на дежурстве не менее 12 раз.

5. Треугольник разрезали на выпуклые четырёхугольники. Докажите, что хотя бы у одного четырёхугольника есть угол не меньше 120°.

6. Можно ли расставить на шахматной доске 8 попарно не бьющих друг друга ладей так, чтобы ровно 3 ладьи стояли на черных клетках?

7. В шеренгу выстроены 20 детей: 10 мальчиков и 10 девочек. Затем по очереди каждый мальчик сказал, сколько детей стоит слева от него, а каждая девочка сказала, сколько детей стоит справа от нее. Докажите, что сумма чисел, сказанных мальчиками, равна сумме чисел, сказанных девочками.

8. Есть кучка из 100 конфет. За ход можно взять какую-то кучку и разделить её на две кучки из $a > 0$ и $b > 0$ конфет. При этом на доску записывается число $a \cdot b$. Чему будет равна сумма всех выписанных чисел, когда ходы закончатся?

9.* В некоторых клетках прямоугольной таблицы нарисованы звездочки. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в её столбце совпадает с количеством звездочек в её строке. Докажите, что число строк в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка, равно числу столбцов в таблице, в которых есть хотя бы одна звездочка.

Числовые конструкции

1. Докажите, что для любого натурального n существуют целые числа, сумма которых равна нулю, а произведение равно n, если:
(a) n четно;
(b) n нечетно.

2. Представьте число 2022 в виде суммы пяти натуральных чисел так, чтобы все цифры в записи этих чисел были различны.

3. У Глеба имеется по одной гире массой 2, 4, 6, ..., 100 г. Можно ли их все разложить на две чаши весов таким образом, чтобы весы находились в равновесии?

4. Некоторый аппарат за n^2 рублей умеет находить среди n монет самую тяжелую.
(a) Как найти самую тяжелую из 8 различных по весу монет, потратив ровно 28 рублей?
(b) За какое наименьшее число рублей можно найти самую тяжелую из 100 различных монет?

5. В любом ли семизначном числе можно поменять 6 цифр так, чтобы результат был не равен 0 и делился на 1234567?

6. Докажите, что существует бесконечно много пар натуральных чисел m, n, для которых число $\dfrac{m^2-1}{n} + \dfrac{n^2-1}{m}$ – целое.

7. Можно ли подобрать 5 целых чисел так, чтобы их попарные суммы образовывали 10 подряд идущих целых чисел?

8. Существует ли натуральное число, которое при зачеркивании своей первой цифры(и, возможно, отбрасывании образовавшихся нулей в начале) уменьшается ровно в 225 раз?

НОД и НОК

У всех есть что-то общее
У кого-то меньшее
У кого-то большее

1. Докажите, что $(a, b) \cdot (a, b) = ab$.

2. Петя посчитал НОК всех чисел от 1 до 1000, а Вася НОК всех чисел от 501 до 1000. У кого результат получился больше и во сколько раз?

3. Найдите наибольшее трехзначное число n, для которого$(n, 1080) = 36$.

4. Даны шесть натуральных чисел. Для каждой пары чисел посчитали их НОД. Могут ли среди этих НОДов встречаться все натуральные числа от 1 до 15?

5. У Саши есть клетчатый лист бумаги размера 20×75. Каждую минуту Саша отрезает от этого листа квадрат наибольшего возможного размера и кладет на стол. Какая сторона будет у самого маленького квадрата на столе?

6. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное (НОК) равно 2000?

7. Найдите наибольший общий делитель чисел $2n + 13$ и $n + 7$.

8. Найдите $(451, 287); (1381955, 690713)$.

9. Докажите, что дробь $\frac{12n+1}{30n+24}$ несократима ни при каком натуральном n

Комбо-Гео конструкции

1. Разрежьте квадрат 4×4 на 9 прямоугольников так, чтобы равные прямоугольники не соприкасались ни сторонами, ни углами. Все разрезы по сторонам клеток.

2. Петя нарисовал три красных и три синих прямых и отметил те точки пересечения, через которые проходят прямые разных цветов. Могло ли оказаться, что отмечена ровно половина всех точек пересечения?

3. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на один равнобедренный и два прямоугольных треугольника.

4. Можно ли покрасить клетки доски 8×8 в 16 цветов так, чтобы для любой пары цветов нашлась пара соседних клеток, покрашенных в эти цвета?

5. Вася нарисовал белую доску 7×7. Затем он красит некоторые клетки в черный по следующим правилам: начать можно в любой клетке, а каждым следующим ходом нужно красить клетку, соседнюю по стороне с уже покрашенной, но не соседнюю с уже покрашенными ранее клетками. Помогите Васе покрасить 33 клетки.

6. Четыре вершины правильного восьмиугольника покрашены в красный цвет, а остальные четыре – в синий. Докажите, что можно найти два равных треугольника: один с красными вершинами, другой – с синими.

7. В клетчатой строчке $1 \times 6n$ какие-то $4n$ квадратиков покрашены в красный, а остальные $2n$ – в синий. Докажите, что найдутся $3n$ последовательных квадратиков, из которых $2n$ красных и n синих.

8. Даны 2022 точки на плоскости. Площадь любого треугольника с вершинами в этих точках не превосходит 1. Докажите, что все эти точки лежат внутри или на границе некоторого треугольника площади 4.

9. Можно ли разрезать тупоугольный треугольник на остроугольные?

Алгоритмы

1. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах найти одну фальшивую монету среди четырех, если неизвестно, легче она или тяжелее?

2. Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Как за 7 проверок найти оба радиоактивных шара?

3. Шейх разложил свои сокровища по девяти мешкам: в первый мешок 1 кг, во второй – 2 кг, в третий – 3 кг, и так далее, в девятый – 9 кг. Коварный визирь украл часть сокровищ из одного мешка. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь шейху определить, из какого именно?

4. В орфографическом словаре 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Лёша открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой странице. Витя хочет угадать это слово, задавая вопросы, на которые Лёша отвечает ”Да” или ”Нет”. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

5. Лёша загадывает клетку доски $N \times N$. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Лёши, попала ли в него загаданная клетка.
(a) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 8$?
(b) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 5$?

6. Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?

7. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$; **(c)** $k = 13$?

8. Имеются красный, синий, зелёный и чёрный шарики, среди которых могут быть волшебные. Детектор позволяет определить, сколько из помещённых в него шариков волшебны. Как узнать, какие шарики волшебные, а какие нет, всего за три измерения?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Седов Г. К.
[*июль 2022 г.*] группа: 7-3 *20.07.2022*

Алгоритмы

1. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах найти одну фальшивую монету среди четырех, если неизвестно, легче она или тяжелее?

2. Из 11 шаров 2 радиоактивны. Про любой набор шаров за одну проверку можно узнать, имеется ли в нем хотя бы один радиоактивный шар (но нельзя узнать, сколько их). Как за 7 проверок найти оба радиоактивных шара?

3. Шейх разложил свои сокровища по девяти мешкам: в первый мешок 1 кг, во второй – 2 кг, в третий – 3 кг, и так далее, в девятый – 9 кг. Коварный визирь украл часть сокровищ из одного мешка. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь шейху определить, из какого именно?

4. В орфографическом словаре 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Лёша открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой странице. Витя хочет угадать это слово, задавая вопросы, на которые Лёша отвечает ”Да” или ”Нет”. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

5. Лёша загадывает клетку доски $N \times N$. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Лёши, попала ли в него загаданная клетка.
(a) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 8$?
(b) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 5$?

6. Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?

7. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$; **(c)** $k = 13$?

8. Имеются красный, синий, зелёный и чёрный шарики, среди которых могут быть волшебные. Детектор позволяет определить, сколько из помещённых в него шариков волшебны. Как узнать, какие шарики волшебные, а какие нет, всего за три измерения?

Клетчатые приемы

На разбор

1. Какое наибольшее число ладей можно поставить на доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?
Стенки

2. Какое наибольшее число квадратов 2×2 можно поместить в квадрат 5×5?
Якоря

3. Какое наибольшее число кораблей 1×4 можно поставить на поле для морского боя 8×8?
Узлы, Пропеллер

4. Какое наибольшее число королей можно поставить на доску 8×8?
Якоря + Узлы

5. Какое наибольшее число слонов можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?
Искривление доски с трансформацией слонов в ладей

Основные задачи

1. Какое наибольшее количество полуладей (бьёт в двух направлениях) можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакая полуладья никакую другую не била?

2. Какое наименьшее количество клеток можно закрасить на доске 8×8 так, чтобы все узлы клетчатой решетки оказались закрашенными?

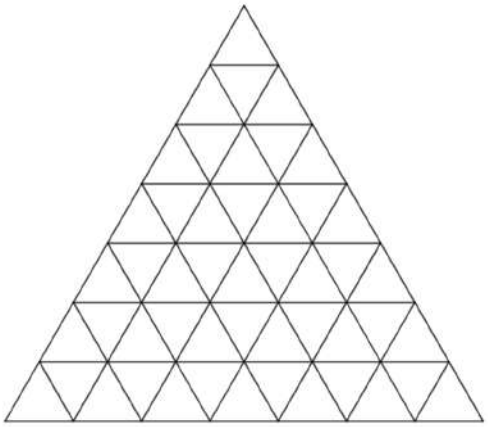
3. На каком наименьшем квадратном клетчатом поле можно расставить полный комплект кораблей для игры в «морской бой» (1 корабль 1×4, 2 корабля 1×3, 3 корабля 1×2 и 4 корабля 1×1)? Корабли не могут соприкасаться между собой ни сторонами, ни вершинами.

4. Как мы выяснили, на шахматную доску 8×8 можно поставить максимум 14 слонов, не бьющих друг друга. А сколькими способами можно это сделать?

5. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске 6×6 так, чтобы каждый ферзь бил ровно одного ферзя?

6. Шахматная фигура «недоферзь» бьёт почти как обычный ферзь, но не может бить на 7 клеток по вертикали, горизонтали и диагонали (обычный может). Какое наибольшее количество недоферзей можно поставить на доску 8×8 так, чтобы они не били друг друга?

7. Равносторонний треугольник со стороной 7 разбили параллельными сторонам прямыми на 49 маленьких равносторонних треугольничков (см. рисунок). Какое наибольшее число двухпалубных кораблей (два треугольничка с общей стороной) можно поставить на получившуюся доску так, чтобы они не соприкасались ни сторонами, ни вершинами?



8. Могут ли 7 слонов побить все клетки доски 4×10?

9. Какое наибольшее число ладей можно поставить на доску 8×8 так, чтобы каждая била нечетное число других?

Группа 8-1

Прединдукция

1. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A доступен для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)

2. Пусть в наличии имеется 2^n резервуаров с водой. Любые два из них соединены краном, который можно открыть, и тогда количество воды в соединенных резервуарах уравняется, после чего кран надо закрыть. Докажите, что за несколько операций можно добиться равномерного заполнения всех резервуаров.

3. Докажите, что любое натуральное число можно представить как сумму нескольких различных чисел Фибоначчи

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, \ldots, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

4. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ бесконечная последовательность действительных чисел, удовлетворяющих уравнению $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$ для всех $n \geqslant 0$, где a_0 и a_1 два различных положительных действительных числа. Может ли последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ быть ограниченой?

5. В таблице $3 \times n$ расставлены фишки трёх цветов: красного, синего и зелёного. Известно, что фишек каждого цвета ровно n. Разрешается менять местами любые две фишки, находящиеся в одной строке. Докажите, что их можно переставить так, что в каждом столбце будет фишки всех трёх цветов.

6. Дано множество из 2022 элементов. Пусть N — натуральное число такое, что $0 \leqslant N \leqslant 2^{2022}$. Докажите, что возможно покрасить каждое подмножестов в красный или синий цвет так, чтобы выполнялись следующие условия: (a) объединения двух красных подмножеств красное, (b) объединение двух синих подмножеств синие, (c) красных подмножеств ровно N штук.

7. Докажите, что для каждого натурального n существует n-значное число, делящееся на 5^n и состоящее только из нечетных цифр.

8. Докажите, что для любого натурального числа n, существуют попарно взаимно простые числа $k_0, \ldots, k_n$ большие единицы такие, что $k_0 k_1 \ldots k_n - 1$ это произведение двух идущих подряд чисел.

Прединдукция. Дополнительные задачи.

1. В стране живет n лжецов. Можно ли посвятить нескольких лжецов в рыцари (возможно никого) так, чтобы каждый человек смог сказать фразу: «Один из моих друзей лжец.»? (Лжецы всегда лгут, а рыцари говорят правду.)

2. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита?

3. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке которого поставлена одна из четырех стрелок: вверх, вниз, вправо, влево. Верхняя сторона правой верхней клетки — выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелокой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90 градусов по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

4. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета

[Летняя школа Лицея «Вторая школа»] Мехралиев А. Р. Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *08 июля 2022 г.*

Прединдукция. Дополнительные задачи.

1. В стране живет n лжецов. Можно ли посвятить нескольких лжецов в рыцари (возможно никого) так, чтобы каждый человек смог сказать фразу: «Один из моих друзей лжец.»? (Лжецы всегда лгут, а рыцари говорят правду.)

2. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита?

3. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке которого поставлена одна из четырех стрелок: вверх, вниз, вправо, влево. Верхняя сторона правой верхней клетки — выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелокой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90 градусов по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

4. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета

Вписанные углы

1. На стороне AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q такие, что $\angle ABP = \angle DCQ$. Докажите, что точки P, Q, B, C лежат на одной окружности.

2. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Прямая AO_1 пересекает вторично окружность ω_2 в точке P. Докажите, что точки O_1, O_2, B, P лежат на одной окружности.

3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки M и N — середины дуг AB и CD описанной окружности четырехугольника $ABCD$, не содержащих других вершин четырехугольника. Докажите, что прямая MN параллельна биссектрисе угла AOB.

4. Окружности ω_1 и ω_2 лежат внутри параллелограмма $ABCD$, причем ω_1 касается AB и AD в точках K и L соответственно, а ω_2 касается BC и CD в точках M и N соответственно. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках P и Q. Оказалось, что точки K, P, M лежат на одной прямой. Докажите, что тогда точки L, Q, N лежат на одной прямой.

5. Постройте треугольник по углу, противоположной стороне и
(a) медиане **(b)** высоте
из этого угла.

6. Даны отрезки AB и CD на плоскости, а также углы α и β. Каково наибольшее возможное количество точек X таких, что $\angle AXB = \alpha, \angle CXD = \beta$?

Задачи посложнее

7. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X, а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y. Докажите, что $A_1A_2 \parallel XY$.

8. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle BAC = 30°, \angle ACB = 45°, \angle BDC = 60°, \angle ADB = 90°$. Найдите $\angle CAD$.

9. Даны угол с вершиной O и точка A на биссектрисе этого угла. Рассматриваются всевозможные окружности, проходящие через точки O и A и пересекающие стороны угла в точках P и Q. Найдите ГМТ середин отрезков PQ.

10. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC, а точка O — центр его описанной окружности. Точка D на стороне AC такова, что $AB = AD$. Докажите, что $AO \perp LD$.

11. Дан треугольник ABC. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, отрезки AQ и CP пересекаются в точке O. Оказалось, что описанные окружности треугольников AOP и COQ равны; пусть L — точка пересечения этих окружностей, отличная от O. Докажите, что L лежит на биссектрисе угла ABC.

12. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, $\angle AMB = 60°$. На сторонах AD и BC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ADK и BCL. Прямая KL пересекает описанную около четырехугольника $ABCD$ окружность в точках P и Q. Докажите, что $PK = LQ$.

Многочлены – 1

1. Вычислить значение многочлена
   (a) $x^2 + 15x + 12$ при $x = 37$;
   (b) $2x^3 - 27x^2 + 141x - 256$ при $x = 16$.

2. Многочлен $f(x)$ называется чётным, если $f(-x) = f(x)$. Докажите, что каждый чётный многочлен есть сумма одночленов только чётных степеней.

3. Каким является многочлен $(x^2 + x - 1)^{10}$: чётным, нечётным, либо ни чётным, ни нечётным?

4. Какие из следующих многочленов чётные, нечётные, ни те, ни другие:
   (a) $(x^2 + 1)^3$;
   (b) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)$;
   (c) $(x + 1)^{10} - (x - 1)^{10}$.

5. Докажите, что каждый многочлен равен сумме чётного и нечётного многочленов.

6. Найдите сумму коэффициентов отдельно при чётных и нечётных степенях многочлена $(x^2 - x + 1)^{10}$.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группы: 8-1, 8-2 *06 июля 2022 г.*

Многочлены – 1

1. Вычислить значение многочлена
   (a) $x^2 + 15x + 12$ при $x = 37$;
   (b) $2x^3 - 27x^2 + 141x - 256$ при $x = 16$.

2. Многочлен $f(x)$ называется чётным, если $f(-x) = f(x)$. Докажите, что каждый чётный многочлен есть сумма одночленов только чётных степеней.

3. Каким является многочлен $(x^2 + x - 1)^{10}$: чётным, нечётным, либо ни чётным, ни нечётным?

4. Какие из следующих многочленов чётные, нечётные, ни те, ни другие:
   (a) $(x^2 + 1)^3$;
   (b) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)$;
   (c) $(x + 1)^{10} - (x - 1)^{10}$.

5. Докажите, что каждый многочлен равен сумме чётного и нечётного многочленов.

6. Найдите сумму коэффициентов отдельно при чётных и нечётных степенях многочлена $(x^2 - x + 1)^{10}$.

Неравенства–1

1. Для положительных чисел x, y, z докажите следующие неравенства:

(a) $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$;

(b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$;

(c) $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$;

(d*) $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz$ (эквивалентная формулировка: $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$).

2. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y} \geqslant 6$.

3. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

4. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geqslant \frac{9}{2(x+y+z)}.$$

5. **(a)** Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz.$$

(b) Для положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, таких, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, докажите неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

6. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) \geqslant xyz.$$

7.* Для положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих неравенству

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4,$$

докажите неравенство

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3.$$

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *07 июля 2022 г.*

Неравенства–1

1. Для положительных чисел x, y, z докажите следующие неравенства:

(a) $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$;

(b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$;

(c) $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$;

(d*) $\dfrac{x^3+y^3+z^3}{3} \geqslant xyz$ (эквивалентная формулировка: $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$).

2. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y} \geqslant 6$.

3. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

4. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geqslant \frac{9}{2(x+y+z)}.$$

5. **(a)** Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz.$$

(b) Для положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, таких, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, докажите неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

6. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) \geqslant xyz.$$

7.* Для положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих неравенству

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4,$$

докажите неравенство

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2} + \frac{bc+1}{(b+c)^2} + \frac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3.$$

Вписанные углы-2

1. На касательной к описанной окружности треугольника ABC в точке B отмечена точка D. Точки P и Q — основания перпендикуляров из точки D на прямые AB и BC. Докажите, что $PQ \perp AC$.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AI и CI пересекают высоту BH треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что прямая BI касается описанной окружности треугольника PIQ.

3. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности ещё раз в точках P и Q (P лежит на прямой BM, Q — на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.

4. На отрезке AB построена дуга α. Окружность ω касается AB в точке T и пересекает α в точках C и D. Лучи AC и TD пересекаются в точке E, лучи BD и TC — в точке F. Докажите, что прямые EF и AB параллельны.

5. Взаимно перпендикулярные прямые l и m пересекаются в точке P окружности так, что они разбивают окружность на три дуги. Отметим на каждой дуге такую точку, что проведенная через нее касательная к окружности пересекается с прямыми l и m в точках, равноотстоящих от точки касания. Докажите, что три отмеченные точки являются вершинами равностороннего треугольника.

6. Внутри треугольника ABC взята точка K, лежащая на биссектрисе угла BAC. Прямая CK вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника ABC, в точке M. Окружность Ω проходит через точку A, касается прямой CM в точке K и пересекает вторично отрезок AB в точке P, а окружность Ω — в точке Q. Докажите, что точки P, Q, M лежат на одной прямой.

7. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную окружность около этого треугольника в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямая, проходящая через центр вписанной окружности треугольника ABC параллельно стороне AC, пересекается с прямой A_0C_0 в точке P. Докажите, что прямая PB касается описанной окружности треугольника ABC.

Графы – 1

1. На клетчатой бумаге нарисован тысячеугольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?
2. Какое наибольшее число рёбер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?
3. Из спичек сложена шахматная доска 8×8. Сторона каждой клетки равна длине спички. Жук хочет, чтобы с любой клетки можно было дойти до любой другой, не переползая через спичку. Какое наименьшее число спичек придётся для этого убрать, если граничные клетки убирать нельзя?
4. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группы: 8-1, 8-2 *07 июля 2022 г.*

Графы – 1

1. На клетчатой бумаге нарисован тысячеугольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?
2. Какое наибольшее число рёбер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?
3. Из спичек сложена шахматная доска 8×8. Сторона каждой клетки равна длине спички. Жук хочет, чтобы с любой клетки можно было дойти до любой другой, не переползая через спичку. Какое наименьшее число спичек придётся для этого убрать, если граничные клетки убирать нельзя?
4. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

Многочлены – 2

1. Многочлен $f(x)$ даёт остаток 1 при делении на $x-1$ и остаток 1 при делении на $x+1$. Какой остаток даёт $f(x)$ при делении на x^2+1?
2. При каком значении a многочлены x^4+ax^2+1 и x^2+ax+1 имеют общий корень?
3. При каких натуральных n и k многочлен x^n-1 делится без остатка на многочлен x^k-1?
4. При каких целых значениях n дробь $\dfrac{n^2+2n-12}{n+5}$ является целым числом?
5. Докажите, что $(x^n-1, x^k-1) = x^{(n,k)}-1$.
6. Найдите такие многочлены $f(x)$ и $g(x)$, что $(x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)=1$.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группы: 8-1, 8-2 *08 июля 2022 г.*

Многочлены – 2

1. Многочлен $f(x)$ даёт остаток 1 при делении на $x-1$ и остаток 1 при делении на $x+1$. Какой остаток даёт $f(x)$ при делении на x^2+1?
2. При каком значении a многочлены x^4+ax^2+1 и x^2+ax+1 имеют общий корень?
3. При каких натуральных n и k многочлен x^n-1 делится без остатка на многочлен x^k-1?
4. При каких целых значениях n дробь $\dfrac{n^2+2n-12}{n+5}$ является целым числом?
5. Докажите, что $(x^n-1, x^k-1) = x^{(n,k)}-1$.
6. Найдите такие многочлены $f(x)$ и $g(x)$, что $(x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)=1$.

Неравенства – 2

Полезные советы. 1. Часто в неравенствах присутствуют три переменные. Чтобы применить неравенство Коши для *двух* переменных, нужно разбить слагаемые на пары. Для этого может потребоваться делить слагаемые пополам и разбивать на пары половинки.

2. Многие неравенства становятся гораздо проще, если превратить их в *однородные*. Однородным называется неравенство, которое не меняется, если все входящие в него переменные умножить на одну и ту же константу. Чтобы сделать неравенство однородным, полезно сравнить степени левой и правой частей и домножить неравенство на подходящее выражение.

1. Для положительных чисел x, y, z докажите следующие неравенства:
(a) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$;
(b) $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geqslant \frac{x+y+z}{3}$;
(c) $(xy+yz+zx)^2 \geqslant 3xyz(x+y+z)$.

2. **(a)** Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $ab+bc+ca > a+b+c$, то $a+b+c > 3$.
(b) Для любых a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geqslant a+b+c.$$

(c) Для любых a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $a+b+c = 3$, докажите, что

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geqslant 6.$$

3. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy+yz+zx$. Докажите неравенство $\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

4. Суммма неотрицательных чисел x, y, z, t равна 4.
(a) Докажите, что $xy+yz+zt+tx \leqslant 4$.
(b) Докажите, что $(xy+zt)(yz+xt)(xz+yt) \leqslant 8$.

5. Пусть A, B, C — положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$\left(A-1+\frac{1}{B}\right)\left(B-1+\frac{1}{C}\right)\left(C-1+\frac{1}{A}\right) \leqslant 1.$$

6. Докажите, что для положительных x, y, z с суммой 1 выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z} \geqslant \frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}.$$

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В., Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *11 июля 2022 г.*

Неравенства – 2

Полезные советы. 1. Часто в неравенствах присутствуют три переменные. Чтобы применить неравенство Коши для *двух* переменных, нужно разбить слагаемые на пары. Для этого может потребоваться делить слагаемые пополам и разбивать на пары половинки.

2. Многие неравенства становятся гораздо проще, если превратить их в *однородные*. Однородным называется неравенство, которое не меняется, если все входящие в него переменные умножить на одну и ту же константу. Чтобы сделать неравенство однородным, полезно сравнить степени левой и правой частей и домножить неравенство на подходящее выражение.

1. Для положительных чисел x, y, z докажите следующие неравенства:
(a) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$;
(b) $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geqslant \frac{x+y+z}{3}$;
(c) $(xy+yz+zx)^2 \geqslant 3xyz(x+y+z)$.

2. **(a)** Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $ab+bc+ca > a+b+c$, то $a+b+c > 3$.
(b) Для любых a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geqslant a+b+c.$$

(c) Для любых a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $a+b+c = 3$, докажите, что

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geqslant 6.$$

3. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy+yz+zx$. Докажите неравенство $\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

4. Суммма неотрицательных чисел x, y, z, t равна 4.
(a) Докажите, что $xy+yz+zt+tx \leqslant 4$.
(b) Докажите, что $(xy+zt)(yz+xt)(xz+yt) \leqslant 8$.

5. Пусть A, B, C — положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$\left(A-1+\frac{1}{B}\right)\left(B-1+\frac{1}{C}\right)\left(C-1+\frac{1}{A}\right) \leqslant 1.$$

6. Докажите, что для положительных x, y, z с суммой 1 выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z} \geqslant \frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}.$$

Графы – 2

1. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника?

2. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется хорошей, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

3. Из кубиков $1\times1\times1$ склеен куб $3\times3\times3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

   - со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (то есть мы не увидим просвета: видны все 9 кубиков фигуры);
   - переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?

4. Пусть точка O лежит внутри выпуклого многогранника с вершинами A_1, ..., A_n. Докажите, что среди углов A_iOA_j не менее $n-1$ не острых.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группы: 8-1, 8-2 *11 июля 2022 г.*

Графы – 2

1. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника?

2. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется хорошей, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

3. Из кубиков $1\times1\times1$ склеен куб $3\times3\times3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

   - со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (то есть мы не увидим просвета: видны все 9 кубиков фигуры);
   - переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?

4. Пусть точка O лежит внутри выпуклого многогранника с вершинами A_1, ..., A_n. Докажите, что среди углов A_iOA_j не менее $n-1$ не острых.

Степень вхождения простого

1. Докажите следующие соотношения для натуральных чисел a, b и c:
(a) $(a,b)\cdot[a,b]=ab$;
(b) $(a,b,c)\cdot[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]=abc\cdot[a,b,c]$;
(c) $[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]\geqslant[a,b,c]$.
(*Указание*: чтобы избежать рассмотрения большого количества случаев, полезно упорядочивать величины, которые вы рассматриваете.)

2. Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ целая. Докажите, что оба слагаемых в этой сумме тоже целые.

3. Два игрока по очереди выписывают делители натурального числа N. При этом нельзя повторять те числа, которые уже выписывали ранее, и каждое выписанное число должно быть взаимно просто с числом, которое только что выписал соперник. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{ab}{a-b}=c$. Известно также, что числа a, b и c не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a-b$ есть точный квадрат.

5. Целые числа x и y таковы, что $(x^7,y^4)\cdot(x^8,y^5)=xy$. Докажите, что число xy — точный куб.

6. Тройка целых чисел (x,y,z), наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения $y^2z+yz^2=x^3+x^2z-2xz^2$. Докажите, что z является кубом целого числа.

7. **(a) Формула Лежандра.** Докажите, что степени вхождения простого числа p в число $n!$ равна

$$||n!||_p=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

(b) Найти все натуральные числа n, для которых число $n!$ делится на 2^{n-1}.
(c*) Решите в натуральных числах уравнение

$$k!=(2^n-1)\cdot(2^n-2)\cdot\ldots\cdot(2^n-2^{n-1}).$$

8.* Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n, ...такова, что число

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$$

является натуральным для всех достаточно больших n. Докажите, что начиная с какого-то места эта последовательность становится постоянной (т.е. все ее члены, начиная с некоторого момента, равны друг другу).

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *12 июля 2022 г.*

Степень вхождения простого

1. Докажите следующие соотношения для натуральных чисел a, b и c:
(a) $(a,b)\cdot[a,b]=ab$;
(b) $(a,b,c)\cdot[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]=abc\cdot[a,b,c]$;
(c) $[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]\geqslant[a,b,c]$.
(*Указание*: чтобы избежать рассмотрения большого количества случаев, полезно упорядочивать величины, которые вы рассматриваете.)

2. Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ целая. Докажите, что оба слагаемых в этой сумме тоже целые.

3. Два игрока по очереди выписывают делители натурального числа N. При этом нельзя повторять те числа, которые уже выписывали ранее, и каждое выписанное число должно быть взаимно просто с числом, которое только что выписал соперник. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{ab}{a-b}=c$. Известно также, что числа a, b и c не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a-b$ есть точный квадрат.

5. Целые числа x и y таковы, что $(x^7,y^4)\cdot(x^8,y^5)=xy$. Докажите, что число xy — точный куб.

6. Тройка целых чисел (x,y,z), наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения $y^2z+yz^2=x^3+x^2z-2xz^2$. Докажите, что z является кубом целого числа.

7. **(a) Формула Лежандра.** Докажите, что степени вхождения простого числа p в число $n!$ равна

$$||n!||_p=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

(b) Найти все натуральные числа n, для которых число $n!$ делится на 2^{n-1}.
(c*) Решите в натуральных числах уравнение

$$k!=(2^n-1)\cdot(2^n-2)\cdot\ldots\cdot(2^n-2^{n-1}).$$

8.* Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n, ...такова, что число

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}$$

является натуральным для всех достаточно больших n. Докажите, что начиная с какого-то места эта последовательность становится постоянной (т.е. все ее члены, начиная с некоторого момента, равны друг другу).

Добавка: простые делители

1. Найти все натуральные n, для которых число $5^n - 2^n$ делится на n.
2. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)
3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
4. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *14 июля 2022 г.*

Добавка: простые делители

1. Найти все натуральные n, для которых число $5^n - 2^n$ делится на n.
2. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)
3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
4. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *14 июля 2022 г.*

Добавка: простые делители

1. Найти все натуральные n, для которых число $5^n - 2^n$ делится на n.
2. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)
3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?
4. К натуральному числу N прибавили наибольший его делитель, меньший N, и получили степень десятки. Найдите все такие N.

Подсчёт двумя способами

1. Сколько острых углов может быть в выпуклом n-угольнике?

2. В классе больше 32, но меньше 48 человек. Каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько человек в классе?

3. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных две партии: одну белыми фигурами, другую — черными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение — 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

4. В классе 20 детей. Каждый день какие-то пары из них жмут друг другу руки, а какие-то нет. Известно, что всего за неделю было совершено 761 рукопожатий. Докажите, что можно выделить группу из семи человек так, что бы между детьми из этой группы было совершено не менее 85 рукопожатий.

5. Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей — опять на две части, и так далее: на каждом шаге выбирали любую из уже имеющихся частей и разрезали её (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными?

6. **(a)** Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый четырехугольник на выпуклые пятиугольники? **(b)** Можно ли разрезать какой-нибудь выпуклый пятиугольник на выпуклые шестиугольники?

7. На окружности отмечены $2n$ точек так, что никакие три хорды с концами в этих точках не пересекаются в одной точке, лежащей внутри окружности. Разобьем отмеченные точки на n пар, и в каждой паре соединим точки отрезком. Число точек пересечения проведенных n отрезков назовем характеристикой разбиения. Найдите среднее арифметическое характеристик по всем разбиениям.

Дополнительные построения

Какие бывают доп построения.

- Отражение точки относительно другой (например, удвоение медианы)
- Отражение точки относительно прямой
- Проекция точки на прямую
- Вторая точка пересечения прямой с окружностью
- Откладывание равных треугольников/отрезков
- Новый объект как образ старого при движении

Сразу разбираем. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle DAB = 90°$. Пусть M - середина стороны BC. Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Точки D, E расположены на гипотенузе AB так, что $BD = BC$ и $AE = AC$. Из точки D провели перпендикуляр DG на катет AC, а из точки E - перпендикуляр EF на катет BC. Докажите, что $DE = EF + DG$.

2. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны BC за точку C отмечена точка N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M - середина отрезка BC. Найдите угол DME.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и биссектрисой BK. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

5. Пусть $ABCD$ - трапеция, в которой углы A и B прямые, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Докажите, что угол ADC в два раза больше угла ABE, где E - середина AD.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$ и $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

7. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

8. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

9. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. а стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH - точка E, а на отрезке CH - точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90°$

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *12 июля 2022 г.*

Дополнительные построения

Какие бывают доп построения.

- Отражение точки относительно другой (например, удвоение медианы)
- Отражение точки относительно прямой
- Проекция точки на прямую
- Вторая точка пересечения прямой с окружностью
- Откладывание равных треугольников/отрезков
- Новый объект как образ старого при движении

Сразу разбираем. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle DAB = 90°$. Пусть M - середина стороны BC. Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Точки D, E расположены на гипотенузе AB так, что $BD = BC$ и $AE = AC$. Из точки D провели перпендикуляр DG на катет AC, а из точки E - перпендикуляр EF на катет BC. Докажите, что $DE = EF + DG$.

2. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны BC за точку C отмечена точка N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M - середина отрезка BC. Найдите угол DME.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и биссектрисой BK. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

5. Пусть $ABCD$ - трапеция, в которой углы A и B прямые, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Докажите, что угол ADC в два раза больше угла ABE, где E - середина AD.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$ и $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

7. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

8. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

9. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. а стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH - точка E, а на отрезке CH - точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90°$

Графы – 3

1. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

2. Дана доска $m \times n$, разбитая на клетки. Сначала в $(m-1)(n-1)+1$ клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись такие четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка. Тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски.

3. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q (p и q — взаимно простые числа). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *13 июля 2022 г.*

Графы – 3

1. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

2. Дана доска $m \times n$, разбитая на клетки. Сначала в $(m-1)(n-1)+1$ клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись такие четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка. Тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски.

3. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q (p и q — взаимно простые числа). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

Неравенства – 3

Полезные советы. 1. В неравенствах, содержащих квадраты или квадратные корни, иногда бывает полезно использовать идеи, характерные для работы с квадратными трехчленами из алгебры. Основные приемы здесь следующие:

- рассмотреть неравенство как квадратное относительно одной из переменных и выписать соответствующее условие на дискриминант;
- выделять полные квадраты (это особенно полезно, когда нужно избавиться от корней).

2. Если вам нужно оценить сумму дробей, полезно изменить дроби так, чтобы у них получился общий знаменатель. Обычно в роли такого знаменателя выступает сумма переменных, входящих в условие задачи.

1. Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

2. Положительные числа x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy + 1} + \sqrt{yz + 1} + \sqrt{zx + 1} > x + y + z.$$

3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} < 2.$$

4. Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant a(b + c + d)$.

5. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем

$$\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S \quad \text{для всех } i = 1, 2, 3.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1.$$

6. Числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что

$$(2 + a)(2 + b) \geqslant cd.$$

7. Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant \sqrt{3}.$$

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В., Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *13 июля 2022 г.*

Неравенства – 3

Полезные советы. 1. В неравенствах, содержащих квадраты или квадратные корни, иногда бывает полезно использовать идеи, характерные для работы с квадратными трехчленами из алгебры. Основные приемы здесь следующие:

- рассмотреть неравенство как квадратное относительно одной из переменных и выписать соответствующее условие на дискриминант;
- выделять полные квадраты (это особенно полезно, когда нужно избавиться от корней).

2. Если вам нужно оценить сумму дробей, полезно изменить дроби так, чтобы у них получился общий знаменатель. Обычно в роли такого знаменателя выступает сумма переменных, входящих в условие задачи.

1. Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

2. Положительные числа x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy + 1} + \sqrt{yz + 1} + \sqrt{zx + 1} > x + y + z.$$

3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} < 2.$$

4. Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant a(b + c + d)$.

5. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем

$$\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S \quad \text{для всех } i = 1, 2, 3.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1.$$

6. Числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что

$$(2 + a)(2 + b) \geqslant cd.$$

7. Докажите, что если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geqslant \sqrt{3}.$$

Чётные числа

1. На плоскости нарисовано нечётное число единичных кругов. Докажите, что найдется центр одного из кругов, покрытый нечётное число раз кругами.

2. Можно ли расставить на рёбрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?

3. Для каких n существует такая перестановка σ множества остатков 0, 1, $\ldots$, $n-1$ по модулю n, что все остатки $\sigma(0)+0$, $\sigma(1)+1$, $\sigma(2)+2$, $\ldots$, $\sigma(n-1)+n-1$ различны?

4. В ряд написаны n различных вещественных чисел. Инверсией называются два числа такие, что меньшее из них стоит правее большего. Тогда можно посчитать сколько пар чисел являются инверсиями. Докажите, что если поменять местами два произвольных элемента, четность числа инверсий изменится.

5. Зритель загадал 8 клеток шахматной доски общего положения (любые две не содержатся в одной строке или в одном столбце). Фокусник за ход выбирает 8 клеток и размещает на эти клетки 8 ферзей, после чего зритель сообщает, какие из ферзей стоят на загаданных клетках. Если число ферзей, стоящих на загаданных клетках чётно, то фокусник побеждает; в противном случае ферзи снимаются с шахматного поля и фокусник делает следующий ход. Сколько ходов понадобится фокуснику, чтобы победить, независимо от загаданных зрителем клеток?

6. 2020 друзей подошли к берегу реки и нашли лодку, вмещающую не более двух человек. Получится ли всем друзьям переправиться на другой берег так, чтобы каждые два друга побывали в лодке вместе ровно один раз (переправляясь либо в одну сторону, либо в другую)?

7. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет?

8. Дан 2022-угольник. Существует ли простая замкнутая 2022-звенная ломаная вершинами в вершинах этого многоугольника, у которой нет параллельных ребер?

9. Рассмотрим 10 точек на окружности длины 90 и выпишем на доску длины всевозможных дуг между этими точками. Могло ли так оказаться, что среди чисел на доске имеются все целые числа от 1 до 89?

[Летняя школа Лицея «Вторая школа»] Мехралиев А. Р.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *14 июля 2022 г.*

Чётные числа

1. На плоскости нарисовано нечётное число единичных кругов. Докажите, что найдется центр одного из кругов, покрытый нечётное число раз кругами.

2. Можно ли расставить на рёбрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?

3. Для каких n существует такая перестановка σ множества остатков 0, 1, $\ldots$, $n-1$ по модулю n, что все остатки $\sigma(0)+0$, $\sigma(1)+1$, $\sigma(2)+2$, $\ldots$, $\sigma(n-1)+n-1$ различны?

4. В ряд написаны n различных вещественных чисел. Инверсией называются два числа такие, что меньшее из них стоит правее большего. Тогда можно посчитать сколько пар чисел являются инверсиями. Докажите, что если поменять местами два произвольных элемента, четность числа инверсий изменится.

5. Зритель загадал 8 клеток шахматной доски общего положения (любые две не содержатся в одной строке или в одном столбце). Фокусник за ход выбирает 8 клеток и размещает на эти клетки 8 ферзей, после чего зритель сообщает, какие из ферзей стоят на загаданных клетках. Если число ферзей, стоящих на загаданных клетках чётно, то фокусник побеждает; в противном случае ферзи снимаются с шахматного поля и фокусник делает следующий ход. Сколько ходов понадобится фокуснику, чтобы победить, независимо от загаданных зрителем клеток?

6. 2020 друзей подошли к берегу реки и нашли лодку, вмещающую не более двух человек. Получится ли всем друзьям переправиться на другой берег так, чтобы каждые два друга побывали в лодке вместе ровно один раз (переправляясь либо в одну сторону, либо в другую)?

7. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, между которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет?

8. Дан 2022-угольник. Существует ли простая замкнутая 2022-звенная ломаная вершинами в вершинах этого многоугольника, у которой нет параллельных ребер?

9. Рассмотрим 10 точек на окружности длины 90 и выпишем на доску длины всевозможных дуг между этими точками. Могло ли так оказаться, что среди чисел на доске имеются все целые числа от 1 до 89?

Дополнительные построения-2

Сразу разбираем. В трапеции $ABCD$, где AD и BC параллельны, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.

1. В треугольнике ABC проовели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle ABD = 90°$ и $AD = BC + CD$. Найдите отношение AD к BC.

3. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение углов BAC и CBA.

4. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

5. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и N (N между M и B) такие, что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

8. CK — биссектриса треугольника ABC. На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что $\angle CTL = \angle ABC$.

9. Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и BC и продолжении стороны CD за точку D выбраны соответственно точки K, L и M так, что треугольники KLM и BCA равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок KM пересекает отрезок AD в точке N. Докажите, что $LN \| AB$.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *14 июля 2022 г.*

Дополнительные построения-2

Сразу разбираем. В трапеции $ABCD$, где AD и BC параллельны, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.

1. В треугольнике ABC проовели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle ABD = 90°$ и $AD = BC + CD$. Найдите отношение AD к BC.

3. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение углов BAC и CBA.

4. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

5. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и N (N между M и B) такие, что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

8. CK — биссектриса треугольника ABC. На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что $\angle CTL = \angle ABC$.

9. Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и BC и продолжении стороны CD за точку D выбраны соответственно точки K, L и M так, что треугольники KLM и BCA равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок KM пересекает отрезок AD в точке N. Докажите, что $LN \| AB$.

Неравенства – 4

Определение. *Элементарные симметрические многочлены* от трех переменных:

$$\sigma_1 = a + b + c, \quad \sigma_2 = ab + bc + ca, \quad \sigma_3 = abc.$$

Теорема. Любой симметрический многочлен от переменных a, b, c можно представить как многочлен от $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Полезные неравенства для симметрических многочленов.

$$\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2, \quad \sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3, \quad \sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3.$$

1. **Формула Ньютона.** Пусть $s_k = a^k + b^k + c^k$. Докажите, что имеет место равенство

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

2. **(a)** Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$.

   (b) Выразите многочлен $f(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

   (c) Неравенство Коши для трех переменных. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc$. (Часто это неравенство применяется в следующем виде: $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.)

3. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27.$$

4. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geqslant 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

   (*Указание*: не бойтесь раскрыть скобки в левой части.)

5. Для вещественных чисел x, y, $z \neq 1$, удовлетворяющих условию $xyz = 1$, докажите неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

6. Для положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих неравенству

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4,$$

   докажите неравенство $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2} + \dfrac{bc+1}{(b+c)^2} + \dfrac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3$. (*Указание*: попробуйте переобозначить знаменатели.)

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В., Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *15 июля 2022 г.*

Неравенства – 4

Определение. *Элементарные симметрические многочлены* от трех переменных:

$$\sigma_1 = a + b + c, \quad \sigma_2 = ab + bc + ca, \quad \sigma_3 = abc.$$

Теорема. Любой симметрический многочлен от переменных a, b, c можно представить как многочлен от $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Полезные неравенства для симметрических многочленов.

$$\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2, \quad \sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3, \quad \sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3.$$

1. **Формула Ньютона.** Пусть $s_k = a^k + b^k + c^k$. Докажите, что имеет место равенство

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

2. **(a)** Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$.

   (b) Выразите многочлен $f(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

   (c) Неравенство Коши для трех переменных. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc$. (Часто это неравенство применяется в следующем виде: $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.)

3. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27.$$

4. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{y}{z}\right)\left(1+\frac{z}{x}\right) \geqslant 2 + \frac{2(x+y+z)}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

   (*Указание*: не бойтесь раскрыть скобки в левой части.)

5. Для вещественных чисел x, y, $z \neq 1$, удовлетворяющих условию $xyz = 1$, докажите неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

6. Для положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих неравенству

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4,$$

   докажите неравенство $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2} + \dfrac{bc+1}{(b+c)^2} + \dfrac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3$. (*Указание*: попробуйте переобозначить знаменатели.)

Догадливая геометрия

1. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N так, что $AC = CM$ и $BN = MN$. Высота треугольника, проведенная из вершины B, пересекает отрезок CM в точке P. Докажите, что NP — биссектриса угла $\angle MNC$.

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам CD и BC. Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой AC.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки M и N так, что $MA = AC = CN$. Отрезки AN и CM пересеклись в точке P. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки P на сторону AC, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω, восстановленная в вершине B, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке P. Касательная к ω, восстановленная в вершине C, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AC, в точке Q. Докажите, что прямая PQ касается ω.

5. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка P, такая что выполняются равенства

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle PCB$ и серединный перпендикуляр к отрезку AB.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *18 июля 2022 г.*

Догадливая геометрия

1. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N так, что $AC = CM$ и $BN = MN$. Высота треугольника, проведенная из вершины B, пересекает отрезок CM в точке P. Докажите, что NP — биссектриса угла $\angle MNC$.

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам CD и BC. Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой AC.

3. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки M и N так, что $MA = AC = CN$. Отрезки AN и CM пересеклись в точке P. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки P на сторону AC, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω, восстановленная в вершине B, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке P. Касательная к ω, восстановленная в вершине C, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AC, в точке Q. Докажите, что прямая PQ касается ω.

5. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась точка P, такая что выполняются равенства

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = 1 : 2 : 3 = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC.$$

Докажите, что следующие три прямые пересекаются в одной точке: внутренние биссектрисы углов $\angle ADP$ и $\angle PCB$ и серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Числа Каталана – 1: триангуляции

Определение и рекуррентная формула

Мы начнем этот сюжет с простой геометрической задачи, которая возникла у нас еще в 7 классе: *чему равна сумма углов n-угольника?* Ответ хорошо известен: $(n-2)\cdot 180°$. Однако нам будет важен не ответ, а решение этой задачи. Напомним, что для доказательства необходимо разбить наш многоугольник непересекающимися диагоналями на треугольники. Эта процедура называется *триангуляцией* и играет большую роль в математике. Отметим, что существование триангуляции для *произвольного* многоугольника совершенно неочевидно. Однако если наш n-угольник *выпуклый*, то триангуляцию легко получить, проведя все диагонали из одной вершины. Поэтому далее, если не оговорено противного, мы будем рассматривать только выпуклые n-угольники.

Заметим, что для выпуклого n-угольника существует много триангуляций. Леонард Эйлер задал совершенно естественный вопрос: *сколько существует различных триангуляций выпуклого n-угольника?* Как ни странно, ответ на этот вроде бы простой вопрос далеко неочевиден и связан с большим количеством других интересных задач из комбинаторной геометрии.

По некоторым причинам мы будем рассматривать выпуклые $(n+1)$-угольники, сдвинув индекс n на 1. Делается это для того, чтобы согласовать получившиеся ответы с общепринятыми обозначениями. А именно, обозначим количество триангуляций выпуклого $(n+1)$-угольника через c_n. Числа c_n называются *числами Каталана*.

Конечно же, естественным является желание найти явную формулу для c_n. Удивительно, но в этой задаче *главным является не явная формула для c_n, а соображения, приводящие к ней*!

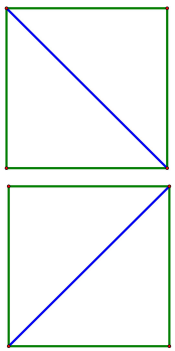


Рис. 1:

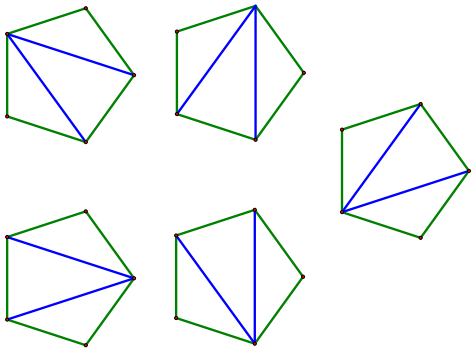


Рис. 2:

Перед тем, как выводить какие-либо формулы, давайте попробуем просто вычислить руками первые несколько чисел Каталана. Во-первых, по определению полагают $c_1 = 1$ (в комбинаторике так часто бывает: если какого-то объекта не существует (в нашем случае — двуугольника), то есть ровно один способ сделать с ним что-то — ничего не делать). Далее, $c_2 = 1$, поскольку треугольник разбивать на треугольники не нужно. А вот $c_3 = 2$, поскольку в четырехугольнике можно провести либо одну диагональ, либо другую (см. рис. 1).

Также легко руками посчитать $c_4 = 5$ (см. рис. 2). Но вот перебор триангуляций шестиугольника уже представляет определенную сложность. Разумеется, можно заметить в этих триангуляциях некоторую закономерность (например, пучок диагоналей, молния и звезда Давида, см. рис. 3), но все это не позволит нам обобщить наши рассуждения для произвольного $(n+1)$-угольника. Поэтому поступим по-другому.

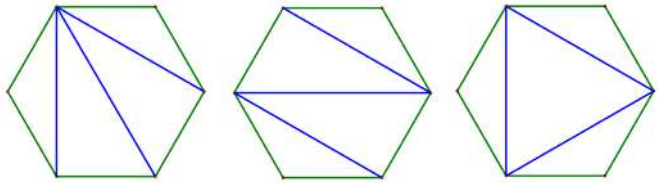


Рис. 3:

Идея, позволяющая вычислить c_5, а за ним и c_6, c_7, ..., заключается в простом наблюдении: нужно разбить большой $(n+1)$-угольник на два маленьких многоугольника с меньшим числом сторон. Тогда триангуляция двух этих маленьких многоугольников даст нам триангуляцию исходного $(n+1)$-угольника. Давайте реализуем этот подход на примере шестиугольника.

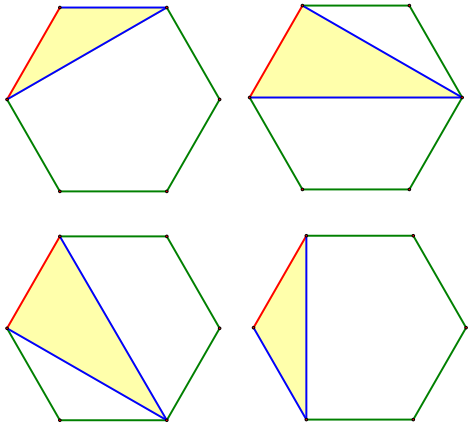


Рис. 4:

Зафиксируем одну сторону шестиугольника. Эта сторона принадлежит единственному треугольнику, который получается в результате триангуляции. Таких треугольников может быть ровно четыре (см. рис. 4):

- первый отсекает от шестиугольника пятиугольник,
- второй отсекает треугольник и четырехугольник,
- третий отсекает четырехугольник и треугольник,
- четвертый отсекает от шестиугольника пятиугольник.

Осталось посчитать количество триангуляций в каждом из случаев, а затем сложить получившиеся ответы. Итого, находим:

$$c_5 = 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 = 14.$$

Удобно записать это выражение только через числа c_k:

$$c_5 = c_1 \cdot c_4 + c_2 \cdot c_3 + c_3 \cdot c_2 + c_4 \cdot c_1.$$

Абсолютно аналогично можно вывести общую рекуррентную формулу для c_n. Для этого мы точно также фиксируем сторону и рассматриваем всевозможные треугольники, содержащие эту сторону. Тогда такой треугольник делит наш $(n+1)$-угольник на две части, причем если в первой содержится $(k+1)$ сторона, то во второй будет $(n-k+1)$ сторона. Триангулировать первый многоугольник можно c_k способами, а второй — c_{n-k} способами. Значит, итого $c_k c_{n-k}$ способов. Осталось просуммировать эти выражения по всем k от 1 до $n-1$. В результате получается следующая замечательная формула:

$$c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + c_3 c_{n-3} + \ldots + c_{n-3} c_3 + c_{n-2} c_2 + c_{n-1} c_1. \qquad (1)$$

Обратите внимание, что получившееся выражение симметрично: первое слагаемое равно последнему, второе — предпоследнему, и т.д. Также во всех слагаемых сумма индексов постоянна и равна n.

Формула (1) позволяет последовательно вычислять числа Каталана. Сделав это для небольших индексов n, мы получим следующую последовательность:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, ...

Триангуляции и многоугольники

1. **Лемма об ушах.** Выпуклый n-угольник $(n > 3)$ триангулирован. Докажите, что найдутся хотя бы два треугольника, у которых две стороны совпадают со сторонами многоугольника («уши»).

2. Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике есть две равные стороны.

3. **(a)** Докажите, что для всякой триангуляции выпуклого многоугольника можно покрасить вершины этого многоугольника в три цвета так, чтобы вершины, соединенные стороной многоугольника или диагональю, были покрашены в разные цвета.

   (b) Докажите, что для всякой триангуляции выпуклого многоугольника можно покрасить треугольники триангуляции в два цвета так, что имеющие общую сторону треугольники будут разного цвета.

4. Выпуклый многоугольник триангулирован. Назовем *флипом* следующую операцию: в четырехугольнике, все стороны которого являются сторонами многоугольника или диагоналями триангуляции, одна диагональ меняется на другую. Докажите, что флипами из любой триангуляции можно получить любую другую.

5. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.

6. Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя провести больше $n-3$ диагоналей, не имеющих общих внутренних точек.

7. Выпуклый n-угольник разбит на q четырехугольников, из которых b невыпуклых. Докажите, что $q \geqslant b + \dfrac{n-2}{2}$.

8.* Найти все $n \geqslant 3$, для которых правильный n-угольник можно триангулировать на равнобедренные треугольники.

Числа Каталана – 2: соответствия и биекции

Комбинаторная геометрия

Посмотрим, в каких комбинаторных конструкциях. Отметим, что центральной идеей, указывающей на возникновение чисел Каталана, является возможность разбить какой-то большой объект на две маленькие части. Это разбиение приводит к формуле $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$, поэтому для доказательства следующих утверждений нам достаточно просто предъявить такое разбиение. Вот несколько примеров.

Задача 1. На окружности отмечены 18 точек. Сколькими способами можно разбить их на пары хордами так, чтобы эти хорды не пересекались?

Задача 2. Сколькими способами можно разбить на пары 20 точек, расположенных на одной прямой, так, чтобы дуги, соединяющие точки из одной пары, не пересекались бы?

Решение. Мы приведем решение только первой задачи, поскольку решение второй полностью аналогично. Обозначим через d_n количество способов соединить $2(n-1)$ точек на окружности непересекающимися хордами. Легко видеть, что $d_1 = 1$ и $d_2 = 1$. Если мы докажем, что числа d_n удовлетворяют соотношению $d_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k d_{n-k}$, то отсюда будет следовать, что $d_n = c_n$ — числа Каталана. Поэтому достаточно доказать соотношение для последовательности $\{d_n\}$. Для этого реализуем идею разбиения множества на две меньшие части. Предположим, что мы провели какую-то хорду, соединяющую две точки. Тогда эта хорда поделит окружность на две дуги, на одной из которых будет лежать $2(k-1)$ точек (если на дуге лежит нечетное количество точек, их невозможно разбить на пары), а на другой — $2(n-k-1)$ точек. Суммируя получившиеся произведения по k от 1 до $n-1$, получаем:

$$d_n = d_1 d_{n-1} + d_2 d_{n-2} + d_3 d_{n-3} + \ldots + d_{n-3} d_3 + d_{n-2} d_2 + d_{n-1} d_1.$$

Тем самым начальные данные последовательностей $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ совпадают, а также совпадают рекуррентные соотношения для последующих членов. Отсюда следует, что $d_n = c_n$, что и требовалось доказать. В частности, $d_9 = c_9 = 1430$.

Теперь решим еще одну комбинаторную задачу, приводящую к числам Каталана. Рассмотрим произведение n чисел $x_1 x_2 \ldots x_n$. Разумеется, порядок, в котором мы перемножаем эти числа, не важен для получения конечного результата (это свойство ассоциативности умножения). Однако промежуточные результаты будут различаться. Поэтому можно поставить вопрос: сколькими способами можно расставить скобки в произведении n сомножителей?

Оказывается, этих способов в точности c_n. Докажем это. Как и раньше, нам необходимо разбить большое произведение на два маленьких. Сделать это можно так: рассмотрим умножение, которое выполняется последним. Тогда две пары скобок стоят так: $(x_1 \ldots x_k) \cdot (x_{k+1} \ldots x_n)$ (внутри этих скобок стоят и другие скобки, но нам они не важны). Первые k чисел можно скомбинировать c_k способами, а последние $(n-k)$ — c_{n-k} способами. Суммируя по k, получаем соотношение $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$. Вместе с начальными данными $c_1 = c_2 = 1$ мы получаем последовательность Каталана.

Эту конструкцию скобочных произведений можно немножко изменить, убрав из рассмотрения числа x_i и оставив только скобки.

Утверждение. Назовем расстановку открывающихся и закрывающихся скобок *правильной*, если открывающихся и закрывающихся скобок равное количество, и на каждом отрезке открывающихся скобок не меньше закрывающихся. Тогда существует в точности c_n правильных расстановок n пар скобок.

Доказательство. Разумеется, можно опять разбить множество скобок на две меньшие части и получить рекуррентную формулу $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$. Однако мы поступим хитрее. В комбинаторике часто оказывается полезным установление прямых аналогий между различными задачами, приводящими к одному и тому же ответу. Покажем, как можно получить правильную расстановку скобок из скобочного произведения. Рассмотрим, например, произведение $((((ab)(cd))(ef))(gh))$. Сотрем все закрывающиеся скобки, заменим все буквы на закрывающиеся скобки и сотрем последнюю закрывающуюся скобку. В результате получится правильная расстановка скобок ((((())())())(). Остается заметить, что, во-первых, разные скобочные произведения приводят к разным расстановкам скобок (*инъекция*), а во-вторых, каждая правильная расстановка скобок получается таким образом (для этого достаточно просто провести все операции в обратном порядке; *сюръекция*). Таким образом, мы получаем *биекцию* между скобочными произведениями и правильными расстановками скобок. Значит, количество тех и других совпадает.

Замечание. Возникает естественный вопрос: а можно ли таким же прямым образом установить биекцию между триангуляциями выпуклых многоугольников и скобочными произведениями? Можно ли установить такую связь между геометрией и алгеброй?! Оказывается, это возможно! Следующая конструкция была предложена Фордером в 1961 г.

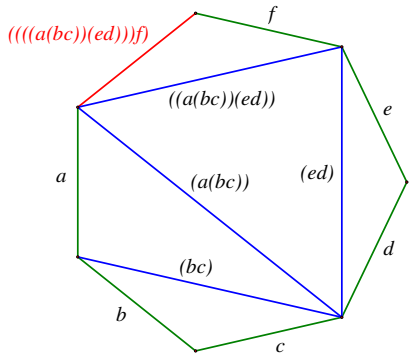


Рис. 1:

Зафиксируем сторону $(n+1)$-угольника и напишем числа x_1, ..., x_n на каждой из остав-

шихся сторон (на рис. 1 вместо x_i для наглядности написаны a, b, c, d, e, f). Теперь будем составлять скобочное произведение по следующему правилу. Берем треугольник из триангуляции, на двух сторонах которого написаны буквы (например, x_1 и x_2). Пишем на третьей стороне произведение (x_1x_2). Продолжаем делать подобную процедуру со всеми оставшимися треугольниками. В результате на выделенной стороне $(n+1)$-угольника окажется записанным скобочное произведение (см. рис. 1)! Несложно доказать, что такое сопоставление триангуляции скобочного произведения является биекцией.

Если Вы немного знакомы с программированием, то, возможно, Вы узнали в определении правильной расстановки скобок так называемую *польскую запись*. Суть ее заключается в следующем. Вместо записи $a * b$ напишем $ab*$, где $*$ — какая-то операция (например, умножение). Последовательно повторяя эту процедуру, мы избавимся от скобок и получим польскую запись данного арифметического выражения. Например, выражению

$$((1-2)+(3+4)) : ((5-6)\cdot 7 - 8\cdot 9)$$

соответствует польская запись

$$12-34++56-7\cdot 89\cdot -:.$$

Обратите внимание, что операция деления, выполняемая последней, действительно стоит на последнем месте! Именно польская запись позволяет реализовать на компьютере стековый калькулятор.

Теперь вернемся к числам Каталана. Запишем скобочное произведение n чисел в польской записи. Более точно, сопоставим каждому скобочному произведению слово из букв a и p (буква p соответствует операции произведения; для удобства мы пишем букву, а не значок $\cdot$) по следующему правилу:

- если выражение состоит из одной буквы, пишем a;
- если скобочным выражениям U и V сопоставлены слова u и v, то произведению $(U\cdot V)$ сопоставим uvp.

Например,

$$(x_1(x_2x_3))(x_4x_5) \mapsto (x_1aap)(aap) \mapsto (aaapp)(aap) \mapsto aaappaapp.$$

Таким образом, каждому скобочному произведению можно сопоставить слово из n букв a и $(n-1)$-й буквы p. Если мы поймем, сколько существует таких слов, мы одновременно сумеем найти явную формулу для чисел Каталана c_n. Кажется, что таких слов в точности C_{2n-1}^{n-1}, и это действительно так.

Однако не каждое слово из n букв a и $(n-1)$-й буквы p может быть сопоставлено скобочному произведению. Например, последней буквой всегда должна быть буква p, а перед первой буквой p должно быть как минимум две буквы a (это не единственные условия, но самые очевидные). Чудо в том, что какое бы слово из n букв a и $(n-1)$-й буквы p мы ни взяли, из него можно получить *ровно одно* слово, соответствующее скобочному произведению, с помощью *циклического сдвига* его букв.

Замечание. Циклический сдвиг букв в слове определяется так: если есть слово $a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_n$, то циклическим сдвигом получается слово $a_{k+1}\ldots a_na_1a_2\ldots a_k$. Иначе говоря, циклический сдвиг букв в слове — это прибавление ко всем индексам букв фиксированного числа k по модулю n.

Докажем это утверждение индукцией по n. Сначала циклическим сдвигом добьемся того, чтобы наше слово оканчивалось на букву p (о необходимости этого мы говорили выше). Далее, по принципу Дирихле найдется такая буква p, перед которой стоят две буквы a (в противном случае букв a не больше, чем букв p). Заменим слово aap буквой a (это означает, что мы заменили произведение двух сомножителей на результат этого произведения). Мы получили слово, в котором $n-1$ буква a и $n-2$ буквы p, поэтому к нему можно применить предположение индукции.

Итак, из каждого набора $2n-1$ слов, получаемых друг из друга циклическими сдвигами, нам подходит ровно одно. Поэтому

$$c_n = \frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{n-1}. \tag{1}$$

Это и есть явная формула для чисел Каталана!

Замечание. С помощью формулы (1) можно ответить на вопрос, как быстро растут числа Каталана c_n с ростом n. Такие утверждения в математике называются *асимптотиками*: мы сравниваем рост чисел последовательности с ростом привычных нам функций: n, n^2, 2^n, ... Это позволяет создать представление о характере поведения чисел последовательности при больших n, когда вычислять их точно очень трудно (да и нет в этом необходимости).

Чтобы найти асимптотику чисел Каталана c_n, нам необходима асимптотика чисел $n!$ (поскольку из них состоит биномиальный коэффициент C_{2n}^n). Имеет место замечательная формула, называемая *формулой Стирлинга*:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(значок $\sim$ читается как «асимптотически равно»; строго это означает, что отношение левой и правой частей стремится к 1 при $n\to\infty$). Удивительным образом в этом формуле присутствуют две важнейшие математические константы: e (с которой мы уже встречались выше) и π (то-самое отношение длины окружности к диаметру, которое нам известно из геометрии)!

Воспользуемся теперь формулой (1) и применим формулу Стирлинга:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{n+1}\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}(n+1)}.$$

Заметим, что при больших n величины n и $n+1$ асимптотически равны (их отношение равно $1+1/n$ и близко к 1 при больших n). Поэтому можно заменить в последней формуле число $n+1$ на n и окончательно получить асимптотическую формулу

$$c_{n+1} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}.$$

Соответствия и биекции

1. Опишите биекцию между следующими классами объектов:

(a) последовательности длины n из 0 и 1 $\leftrightarrow$ подмножества множества из n элементов;

(b) пути хромой ладьи на шахматной доске из клетка a1 до клетки h8 (хромая ладья умеет ходить или на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх) $\leftrightarrow$ выборы 7 шариков из набора, содержащего 7 белых и 7 черных шариков;

(c) замощения прямоугольника $2 \times n$ доминошками $1 \times 2 \leftrightarrow$ последовательности длины $n-1$ из 0 и 1, в которых две единицы не стоят рядом.

2. Пусть S — множество из 16 точек общего положения на плоскости. Обозначим через $\chi(S)$ количество способов провести 8 непересекающихся отрезков с концами в этих точках (отрезки не должны пересекаться даже по концам). Найти наименьшее возможное значение $\chi(S)$.

3. Правильный треугольник со стороной n разбит на n^2 правильных треугольничков со стороной 1. Сколько существует параллелограммов, состоящих из этих треугольничков?

4. *Разбиением натурального числа* n назовем разложение этого числа в сумму (возможно, совпадающих) натуральных чисел. Разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Докажите, что

(a) количество разбиений числа n равно количеству диаграмм из n клеток, строчки которых выровнены по левому краю и длина каждой следующей строки не больше длины предыдущей строки (такие диаграннмы называются *диаграммами Юнга*);

(b) количество разбиений числа n на ровно k натуральных слагаемых равно количеству разбиений числа n на слагаемые, наибольшее из которых равно k.

(c) количество разбиений числа n равно количеству разбиений числа $2n$ на n слагаемых;

(d) количество разбиений числа n на различные слагаемые равно количеству разбиений числа n на нечетные слагаемые;

5. Рассматриваются всевозможные последовательности длины n, состоящие из 0 и 1. Обозначим через a_n количество таких последовательностей, не содержащих фрагмента $(0,1,0)$, а через b_n — количество таких последовательностей, не содержащих фрагментов $(0,0,1,1)$ и $(1,1,0,0)$. Докажите, что $b_{n+1} = 2a_n$.

6. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}^2$ пар точек с целыми координатами и будем изучать пути из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ (где $n \geqslant 0$ — целое число), которые проходят по узлам целочисленной решетки и состоят из диагоналей маленьких клеточек.

(a) Сколько существует таких путей?

(b) Докажите, что путей, лежащих в верхней полуплоскости относительно оси Ox (мы считаем, что точки оси Ox также принадлежат верхней полуплоскости), ровно c_{n+1}.

(c) Докажите, что путей, лежащих в верхней полуплоскости, столько же, сколько путей, которые ведут из точки $(0,0)$ в точку $(2n,-1)$. Выведите отсюда явную формулу для чисел Каталана.

7.* Пусть n — натуральное число. Каждая точка (x,y) на координатной плоскости с целыми неотрицательными координатами x, y, такими, что $x+y<n$, окрашена или в красный, или в синий цвет по следующему правилу. Если точка (x,y) красная, то красными также являются все точки (x',y'), где $x' \leqslant x$ и $y' \leqslant y$. Пусть A — это количество способов выбрать n синих точек с попарно разными x-координатами, а B — количество способов выбрать n синих точек с попарно разными y-координатами. Докажите, что $A=B$.

Группа 8-2

Вписанные углы

1. На стороне AD вписанного четырехугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q такие, что $\angle ABP = \angle DCQ$. Докажите, что точки P, Q, B, C лежат на одной окружности.

2. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. На прямой AB выбирается точка P. Найдите ГМТ точек пересечения описанных окружностей окружностей треугольников ADP и BCP, отличных от P.

3. Треугольник ABC вписан в окружность. Хорды AM и AN этой окружности пересекают отрезок BC в точках K и L соответственно. Оказалось, что четырехугольник $KLNM$ вписанный. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

4. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Прямая AO_1 пересекает вторично окружность ω_2 в точке P. Докажите, что точки O_1, O_2, B, P лежат на одной окружности.

5. Постройте треугольник по углу, противоположной стороне и
(a) медиане **(b)** высоте
из этого угла.

6. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Оказалось, что описанные окружности треугольников AIC и ABC равны. Найдите $\angle ABC$.

Задачи посложнее

7. Дан правильный семиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Прямые A_2A_3 и A_5A_6 пересекаются в точке X, а прямые A_3A_5 и A_1A_6 — в точке Y. Докажите, что $A_1A_2 \parallel XY$.

8. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle BAC = 30°, \angle ACB = 45°, \angle BDC = 60°, \angle ADB = 90°$. Найдите $\angle CAD$.

9. Даны угол с вершиной O и точка A на биссектрисе этого угла. Рассматриваются всевозможные окружности, проходящие через точки O и A и пересекающие стороны угла в точках P и Q. Найдите ГМТ середин отрезков PQ.

10. Дан треугольник ABC. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, отрезки AQ и CP пересекаются в точке O. Оказалось, что описанные окружности треугольников AOP и COQ равны; пусть L — точка пересечения этих окружностей, отличная от O. Докажите, что L лежит на биссектрисе угла ABC.

Прединдукция

1. Пусть в наличии имеется 2^n резервуаров с водой. Любые два из них соединены краном, который можно открыть, и тогда количество воды в соединенных резервуарах уравняется, после чего кран надо закрыть. Докажите, что за несколько операций можно добиться равномерного заполнения всех резервуаров.

2. Докажите, что любое натуральное число можно представить

(a) как сумму нескольких различных степеней двойки (возможно нулевой).

(b) как сумму нескольких различных чисел Фибоначчи

$$F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 2, \ldots, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}.$$

3. В стране некоторые пары городов соединены односторонними прямыми авиарейсами (между любыми двумя городами есть не более одного рейса). Скажем, что город A доступен для города B, если из B можно долететь в A, возможно, с пересадками. Известно, что для любых двух городов P и Q существует город R, для которого и P, и Q доступны. Докажите, что существует город, для которого доступны все города страны. (Считается, что из города можно долететь до него самого.)

4. Пусть $a_0, a_1, a_2, ...$ бесконечная последовательность действительных чисел, удовлетворяющих уравнению $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$ для всех $n \geqslant 0$, где a_0 и a_1 два различных положительных действительных числа. Может ли последовательность $a_0, a_1, a_2, ...$ быть ограниченой?

5. **(a)** В таблице $2 \times n$ расставлены фишки 2 цветов. Известно, что фишек каждого цвета ровно n. Разрешается менять местами любые две фишки, находящиеся в одной строке. Докажите, что их можно переставить так, что в каждом столбце будут фишки 2 цветов.

(b) Докажите аналогичную задачу для таблицы $3 \times n$ и трех цветов.

6. Дано множество из 2022 элементов. Пусть $0 \leqslant N \leqslant 2^{2022}$ — целое число. Докажите, что можно покрасить каждое из подмножеств в красный или синий цвет так, чтобы выполнялись следующие условия: (a) объединения двух красных подмножеств красное, (b) объединение двух синих подмножеств синие, (c) красных подмножеств ровно N штук.

Прединдукция. Дополнительные задачи.

1. В стране живет n лжецов. Можно ли посвятить нескольких лжецов в рыцари (возможно никого) так, чтобы каждый человек смог сказать фразу: «Один из моих друзей лжец.»? (Лжецы всегда лгут, а рыцари говорят правду.)

2. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита?

3. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке которого поставлена одна из четырех стрелок: вверх, вниз, вправо, влево. Верхняя сторона правой верхней клетки — выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелокой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90 градусов по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

4. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета

[Летняя школа Лицея «Вторая школа»] Мехралиев А. Р. Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *08 июля 2022 г.*

Прединдукция. Дополнительные задачи.

1. В стране живет n лжецов. Можно ли посвятить нескольких лжецов в рыцари (возможно никого) так, чтобы каждый человек смог сказать фразу: «Один из моих друзей лжец.»? (Лжецы всегда лгут, а рыцари говорят правду.)

2. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита?

3. Лабиринт представляет собой квадрат 8×8, в каждой клетке которого поставлена одна из четырех стрелок: вверх, вниз, вправо, влево. Верхняя сторона правой верхней клетки — выход из лабиринта. В левой нижней клетке находится фишка, которая каждым своим ходом перемещается на одну клетку в направлении, указанном стрелокой. После каждого хода стрелка в клетке, в которой только что была фишка, поворачивается на 90 градусов по часовой стрелке. Докажите, что рано или поздно фишка выйдет из лабиринта.

4. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета

Многочлены – 1

1. Вычислить значение многочлена
   (a) $x^2 + 15x + 12$ при $x = 37$;
   (b) $2x^3 - 27x^2 + 141x - 256$ при $x = 16$.

2. Многочлен $f(x)$ называется чётным, если $f(-x) = f(x)$. Докажите, что каждый чётный многочлен есть сумма одночленов только чётных степеней.

3. Каким является многочлен $(x^2 + x - 1)^{10}$: чётным, нечётным, либо ни чётным, ни нечётным?

4. Какие из следующих многочленов чётные, нечётные, ни те, ни другие:
   (a) $(x^2 + 1)^3$;
   (b) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)$;
   (c) $(x + 1)^{10} - (x - 1)^{10}$.

5. Докажите, что каждый многочлен равен сумме чётного и нечётного многочленов.

6. Найдите сумму коэффициентов отдельно при чётных и нечётных степенях многочлена $(x^2 - x + 1)^{10}$.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группы: 8-1, 8-2 *06 июля 2022 г.*

Многочлены – 1

1. Вычислить значение многочлена
   (a) $x^2 + 15x + 12$ при $x = 37$;
   (b) $2x^3 - 27x^2 + 141x - 256$ при $x = 16$.

2. Многочлен $f(x)$ называется чётным, если $f(-x) = f(x)$. Докажите, что каждый чётный многочлен есть сумма одночленов только чётных степеней.

3. Каким является многочлен $(x^2 + x - 1)^{10}$: чётным, нечётным, либо ни чётным, ни нечётным?

4. Какие из следующих многочленов чётные, нечётные, ни те, ни другие:
   (a) $(x^2 + 1)^3$;
   (b) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)$;
   (c) $(x + 1)^{10} - (x - 1)^{10}$.

5. Докажите, что каждый многочлен равен сумме чётного и нечётного многочленов.

6. Найдите сумму коэффициентов отдельно при чётных и нечётных степенях многочлена $(x^2 - x + 1)^{10}$.

Вписанные углы-2

1. Касательная в точке B к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую AC в точке D. Пусть BL — биссектриса треугольника ABC. Докажите, что $DB = DL$.

2. Окружность ω_2 проходит через центр O окружности ω_1 и пересекает ее в точках A и B. Касательная к окружности ω_2 в точке A пересекает вторично окружность ω_1 в точке C. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

3. На касательной к описанной окружности треугольника ABC в точке B отмечена точка D. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые AB и BC. Докажите, что $PQ \perp AC$.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности ещё раз в точках P и Q (P лежит на прямой BM, Q — на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AI и CI пересекают высоту BH треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что прямая BI касается описанной окружности треугольника PIQ.

6. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Касательные, проведенные к описанным окружностям треугольников CHB и AHB в точке B пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $A_1H = C_1H$.

7. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой.

Неравенства–1

1. Для положительных чисел x, y, z докажите следующие неравенства:

(a) $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$;

(b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$;

(c) $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$;

2. Преобразуя выражения и выделяя полные квадраты, докажите следующие неравенства:

(a) $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$;

(b) $\dfrac{a+c}{2} + \dfrac{b+d}{2} \geqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}$;

(c) $\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}$.

3. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y} \geqslant 6$.

4. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

5. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geqslant \frac{9}{2(x+y+z)}.$$

6. **(a)** Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz.$$

(b) Для положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, таких, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, докажите неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

7.* Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) \geqslant xyz.$$

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *07 июля 2022 г.*

Неравенства–1

1. Для положительных чисел x, y, z докажите следующие неравенства:

(a) $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$;

(b) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geqslant 2$;

(c) $\dfrac{2xy}{x+y} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$;

2. Преобразуя выражения и выделяя полные квадраты, докажите следующие неравенства:

(a) $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$;

(b) $\dfrac{a+c}{2} + \dfrac{b+d}{2} \geqslant \sqrt{(a+c)(b+d)}$;

(c) $\sqrt{a^2+c^2} + \sqrt{b^2+d^2} \geqslant \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}$.

3. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x+y}{z} + \dfrac{y+z}{x} + \dfrac{z+x}{y} \geqslant 6$.

4. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{z+x} + \dfrac{z}{x+y} \geqslant \dfrac{3}{2}$.

5. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \geqslant \frac{9}{2(x+y+z)}.$$

6. **(a)** Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz.$$

(b) Для положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, таких, что $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, докажите неравенство

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

7.* Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) \geqslant xyz.$$

Графы – 1

1. На клетчатой бумаге нарисован тысячеугольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?
2. Какое наибольшее число рёбер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?
3. Из спичек сложена шахматная доска 8×8. Сторона каждой клетки равна длине спички. Жук хочет, чтобы с любой клетки можно было дойти до любой другой, не переползая через спичку. Какое наименьшее число спичек придётся для этого убрать, если граничные клетки убирать нельзя?
4. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группы: 8-1, 8-2 *07 июля 2022 г.*

Графы – 1

1. На клетчатой бумаге нарисован тысячеугольник со сторонами по границам клеток. Из какого наименьшего числа клеток он может состоять?
2. Какое наибольшее число рёбер можно перекусить в проволочном каркасе куба так, чтобы каркас не развалился на части?
3. Из спичек сложена шахматная доска 8×8. Сторона каждой клетки равна длине спички. Жук хочет, чтобы с любой клетки можно было дойти до любой другой, не переползая через спичку. Какое наименьшее число спичек придётся для этого убрать, если граничные клетки убирать нельзя?
4. Есть m болельщиков: некоторые из них (возможно, все или никто) болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

Многочлены – 2

1. Многочлен $f(x)$ даёт остаток 1 при делении на $x-1$ и остаток 1 при делении на $x+1$. Какой остаток даёт $f(x)$ при делении на x^2+1?
2. При каком значении a многочлены x^4+ax^2+1 и x^2+ax+1 имеют общий корень?
3. При каких натуральных n и k многочлен x^n-1 делится без остатка на многочлен x^k-1?
4. При каких целых значениях n дробь $\dfrac{n^2+2n-12}{n+5}$ является целым числом?
5. Докажите, что $(x^n-1, x^k-1) = x^{(n,k)}-1$.
6. Найдите такие многочлены $f(x)$ и $g(x)$, что $(x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)=1$.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группы: 8-1, 8-2 *08 июля 2022 г.*

Многочлены – 2

1. Многочлен $f(x)$ даёт остаток 1 при делении на $x-1$ и остаток 1 при делении на $x+1$. Какой остаток даёт $f(x)$ при делении на x^2+1?
2. При каком значении a многочлены x^4+ax^2+1 и x^2+ax+1 имеют общий корень?
3. При каких натуральных n и k многочлен x^n-1 делится без остатка на многочлен x^k-1?
4. При каких целых значениях n дробь $\dfrac{n^2+2n-12}{n+5}$ является целым числом?
5. Докажите, что $(x^n-1, x^k-1) = x^{(n,k)}-1$.
6. Найдите такие многочлены $f(x)$ и $g(x)$, что $(x+1)f(x)+(x^2+1)g(x)=1$.

Графы – 2

1. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника?

2. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется хорошей, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

3. Из кубиков $1\times1\times1$ склеен куб $3\times3\times3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

   - со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (то есть мы не увидим просвета: видны все 9 кубиков фигуры);
   - переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?

4. Пусть точка O лежит внутри выпуклого многогранника с вершинами A_1, ..., A_n. Докажите, что среди углов A_iOA_j не менее $n-1$ не острых.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группы: 8-1, 8-2 *11 июля 2022 г.*

Графы – 2

1. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник площадью в n клеток. Его контур идёт по линиям сетки. Каков наибольший периметр многоугольника?

2. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам (при этом все цвета присутствуют). Пара цветов называется хорошей, если найдутся две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?

3. Из кубиков $1\times1\times1$ склеен куб $3\times3\times3$. Какое наибольшее количество кубиков можно из него выкинуть, чтобы осталась фигура с такими двумя свойствами:

   - со стороны каждой грани исходного куба фигура выглядит как квадрат 3×3 (то есть мы не увидим просвета: видны все 9 кубиков фигуры);
   - переходя в фигуре от кубика к кубику через их общую грань, можно от каждого кубика добраться до любого другого?

4. Пусть точка O лежит внутри выпуклого многогранника с вершинами A_1, ..., A_n. Докажите, что среди углов A_iOA_j не менее $n-1$ не острых.

Неравенства – 2

Полезные советы. 1. Часто в неравенствах присутствуют три переменные. Чтобы применить неравенство Коши для *двух* переменных, нужно разбить слагаемые на пары. Для этого может потребоваться делить слагаемые пополам и разбивать на пары половинки.

2. Многие неравенства становятся гораздо проще, если превратить их в *однородные*. Однородным называется неравенство, которое не меняется, если все входящие в него переменные умножить на одну и ту же константу. Чтобы сделать неравенство однородным, полезно сравнить степени левой и правой частей и домножить неравенство на подходящее выражение.

1. Для положительных чисел x, y, z докажите следующие неравенства:
(a) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$;
(b) $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geqslant \frac{x+y+z}{3}$;
(c) $(xy+yz+zx)^2 \geqslant 3xyz(x+y+z)$.

2. **(a)** Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $ab+bc+ca > a+b+c$, то $a+b+c > 3$.
(b) Для любых a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geqslant a+b+c.$$

(c) Для любых a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $a+b+c = 3$, докажите, что

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geqslant 6.$$

3. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy+yz+zx$. Докажите неравенство $\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

4. Суммма неотрицательных чисел x, y, z, t равна 4.
(a) Докажите, что $xy+yz+zt+tx \leqslant 4$.
(b) Докажите, что $(xy+zt)(yz+xt)(xz+yt) \leqslant 8$.

5. Пусть A, B, C — положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$\left(A-1+\frac{1}{B}\right)\left(B-1+\frac{1}{C}\right)\left(C-1+\frac{1}{A}\right) \leqslant 1.$$

6. Докажите, что для положительных x, y, z с суммой 1 выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z} \geqslant \frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}.$$

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В., Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *11 июля 2022 г.*

Неравенства – 2

Полезные советы. 1. Часто в неравенствах присутствуют три переменные. Чтобы применить неравенство Коши для *двух* переменных, нужно разбить слагаемые на пары. Для этого может потребоваться делить слагаемые пополам и разбивать на пары половинки.

2. Многие неравенства становятся гораздо проще, если превратить их в *однородные*. Однородным называется неравенство, которое не меняется, если все входящие в него переменные умножить на одну и ту же константу. Чтобы сделать неравенство однородным, полезно сравнить степени левой и правой частей и домножить неравенство на подходящее выражение.

1. Для положительных чисел x, y, z докажите следующие неравенства:
(a) $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$;
(b) $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geqslant \frac{x+y+z}{3}$;
(c) $(xy+yz+zx)^2 \geqslant 3xyz(x+y+z)$.

2. **(a)** Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $ab+bc+ca > a+b+c$, то $a+b+c > 3$.
(b) Для любых a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $abc = 1$, докажите, что

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \geqslant a+b+c.$$

(c) Для любых a, b, $c > 0$, удовлетворяющих условию $a+b+c = 3$, докажите, что

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geqslant 6.$$

3. Положительные числа x, y и z удовлетворяют условию $xyz \geqslant xy+yz+zx$. Докажите неравенство $\sqrt{xyz} \geqslant \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

4. Суммма неотрицательных чисел x, y, z, t равна 4.
(a) Докажите, что $xy+yz+zt+tx \leqslant 4$.
(b) Докажите, что $(xy+zt)(yz+xt)(xz+yt) \leqslant 8$.

5. Пусть A, B, C — положительные числа, произведение которых равно 1. Докажите, что

$$\left(A-1+\frac{1}{B}\right)\left(B-1+\frac{1}{C}\right)\left(C-1+\frac{1}{A}\right) \leqslant 1.$$

6. Докажите, что для положительных x, y, z с суммой 1 выполнено неравенство

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z} \geqslant \frac{2}{1+x}+\frac{2}{1+y}+\frac{2}{1+z}.$$

Дополнительные построения

Какие бывают доп построения.

- Отражение точки относительно другой (например, удвоение медианы)
- Отражение точки относительно прямой
- Проекция точки на прямую
- Вторая точка пересечения прямой с окружностью
- Откладывание равных треугольников/отрезков
- Новый объект как образ старого при движении

Сразу разбираем. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle DAB = 90°$. Пусть M - середина стороны BC. Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Точки D, E расположены на гипотенузе AB так, что $BD = BC$ и $AE = AC$. Из точки D провели перпендикуляр DG на катет AC, а из точки E - перпендикуляр EF на катет BC. Докажите, что $DE = EF + DG$.

2. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны BC за точку C отмечена точка N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M - середина отрезка BC. Найдите угол DME.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и биссектрисой BK. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

5. Пусть $ABCD$ - трапеция, в которой углы A и B прямые, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Докажите, что угол ADC в два раза больше угла ABE, где E - середина AD.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$ и $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

7. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

8. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

9. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. а стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH - точка E, а на отрезке CH - точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90°$

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *12 июля 2022 г.*

Дополнительные построения

Какие бывают доп построения.

- Отражение точки относительно другой (например, удвоение медианы)
- Отражение точки относительно прямой
- Проекция точки на прямую
- Вторая точка пересечения прямой с окружностью
- Откладывание равных треугольников/отрезков
- Новый объект как образ старого при движении

Сразу разбираем. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle DAB = 90°$. Пусть M - середина стороны BC. Оказалось, что $\angle ADC = \angle BAM$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CAM$.

1. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. Точки D, E расположены на гипотенузе AB так, что $BD = BC$ и $AE = AC$. Из точки D провели перпендикуляр DG на катет AC, а из точки E - перпендикуляр EF на катет BC. Докажите, что $DE = EF + DG$.

2. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны BC за точку C отмечена точка N так, что $BM = MN$. Докажите, что $AM = CN$.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M - середина отрезка BC. Найдите угол DME.

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и биссектрисой BK. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

5. Пусть $ABCD$ - трапеция, в которой углы A и B прямые, $AB = AD$, $CD = BC + AD$, $BC < AD$. Докажите, что угол ADC в два раза больше угла ABE, где E - середина AD.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$ и $\angle ABD + \angle CDB = 180°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.

7. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle CAD + \angle BCA = 180°$ и $AB = BC + AD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle ACD = \angle CDA$.

8. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка P так, что $\angle APB + \angle CPD = 180°$. Докажите, что $\angle PBC = \angle PDC$.

9. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. а стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH - точка E, а на отрезке CH - точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90°$

Степень вхождения простого

1. Докажите следующие соотношения для натуральных чисел a, b и c:
(a) $(a,b)\cdot[a,b]=ab$;
(b) $(a,b,c)\cdot[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]=abc\cdot[a,b,c]$;
(c) $[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]\geqslant[a,b,c]$.
(*Указание*: чтобы избежать рассмотрения большого количества случаев, полезно упорядочивать величины, которые вы рассматриваете.)

2. Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ целая. Докажите, что оба слагаемых в этой сумме тоже целые.

3. Два игрока по очереди выписывают делители натурального числа N. При этом нельзя повторять те числа, которые уже выписывали ранее, и каждое выписанное число должно быть взаимно просто с числом, которое только что выписал соперник. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Пусть m и n натуральные числа, такие что m^2+n^2+m делится на mn. Докажите, что m— точный квадрат.

5. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{ab}{a-b}=c$. Известно также, что числа a, b и c не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a-b$ есть точный квадрат.

6. Целые числа x и y таковы, что $(x^7,y^4)\cdot(x^8,y^5)=xy$. Докажите, что число xy — точный куб.

7. Тройка целых чисел (x,y,z), наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения $y^2z+yz^2=x^3+x^2z-2xz^2$. Докажите, что z является кубом целого числа.

8. **(a) Формула Лежандра.** Докажите, что степени вхождения простого числа p в число $n!$ равна

$$||n!||_p=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

(b) Найти все натуральные числа n, для которых число $n!$ делится на 2^{n-1}.
(c*) Решите в натуральных числах уравнение

$$k!=(2^n-1)\cdot(2^n-2)\cdot\ldots\cdot(2^n-2^{n-1}).$$

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *12 июля 2022 г.*

Степень вхождения простого

1. Докажите следующие соотношения для натуральных чисел a, b и c:
(a) $(a,b)\cdot[a,b]=ab$;
(b) $(a,b,c)\cdot[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]=abc\cdot[a,b,c]$;
(c) $[a,b]\cdot[b,c]\cdot[c,a]\geqslant[a,b,c]$.
(*Указание*: чтобы избежать рассмотрения большого количества случаев, полезно упорядочивать величины, которые вы рассматриваете.)

2. Натуральные числа a и b таковы, что сумма $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$ целая. Докажите, что оба слагаемых в этой сумме тоже целые.

3. Два игрока по очереди выписывают делители натурального числа N. При этом нельзя повторять те числа, которые уже выписывали ранее, и каждое выписанное число должно быть взаимно просто с числом, которое только что выписал соперник. Кто выигрывает при правильной игре?

4. Пусть m и n натуральные числа, такие что m^2+n^2+m делится на mn. Докажите, что m— точный квадрат.

5. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\frac{ab}{a-b}=c$. Известно также, что числа a, b и c не имеют общего для них всех натурального делителя, большего 1. Докажите, что $a-b$ есть точный квадрат.

6. Целые числа x и y таковы, что $(x^7,y^4)\cdot(x^8,y^5)=xy$. Докажите, что число xy — точный куб.

7. Тройка целых чисел (x,y,z), наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения $y^2z+yz^2=x^3+x^2z-2xz^2$. Докажите, что z является кубом целого числа.

8. **(a) Формула Лежандра.** Докажите, что степени вхождения простого числа p в число $n!$ равна

$$||n!||_p=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$$

(b) Найти все натуральные числа n, для которых число $n!$ делится на 2^{n-1}.
(c*) Решите в натуральных числах уравнение

$$k!=(2^n-1)\cdot(2^n-2)\cdot\ldots\cdot(2^n-2^{n-1}).$$

Добавка: простые делители

1. Найти все натуральные n, для которых число $5^n - 2^n$ делится на n.
2. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)
3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *14 июля 2022 г.*

Добавка: простые делители

1. Найти все натуральные n, для которых число $5^n - 2^n$ делится на n.
2. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)
3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

Добавка: простые делители

1. Найти все натуральные n, для которых число $5^n - 2^n$ делится на n.
2. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)
3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-1 *14 июля 2022 г.*

Добавка: простые делители

1. Найти все натуральные n, для которых число $5^n - 2^n$ делится на n.
2. Докажите, что каждое натуральное число является разностью двух натуральных чисел, имеющих одинаковое количество простых делителей. (Каждый простой делитель учитывается один раз, например, число 12 имеет два простых делителя: 2 и 3.)
3. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

Подсчёт двумя способами

1. Сколько острых углов может быть в выпуклом n-угольнике?

2. В классе больше 32, но меньше 48 человек. Каждый мальчик дружит с тремя девочками, а каждая девочка — с пятью мальчиками. Сколько человек в классе?

3. В шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым из остальных две партии: одну белыми фигурами, другую — черными. По окончании турнира оказалось, что все участники набрали одинаковое количество очков (за победу дается 1 очко, за ничью — 1/2 очка, за поражение — 0 очков). Докажите, что найдутся два участника, выигравшие одинаковое число партий белыми.

4. В классе 20 детей. Каждый день какие-то пары из них жмут друг другу руки, а какие-то нет. Известно, что всего за неделю было совершено 761 рукопожатий. Докажите, что можно выделить группу из семи человек так, что бы между детьми из этой группы было совершено не менее 85 рукопожатий.

5. Остроугольный треугольник разрезали прямолинейным разрезом на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей — опять на две части, и так далее: на каждом шаге выбирали любую из уже имеющихся частей и разрезали её (по прямой) на две. Через несколько шагов оказалось, что исходный треугольник распался на несколько треугольников. Могут ли все они быть тупоугольными?

6. **(a)** Разрежьте какой-нибудь выпуклый четырехугольник на выпуклые пятиугольники. **(b)** Докажите, что нельзя разрезать выпуклый пятиугольник на выпуклые шестиугольники.

7. На окружности отмечены $2n$ точек так, что никакие три хорды с концами в этих точках не пересекаются в одной точке, лежащей внутри окружности. Разобьем отмеченные точки на n пар, и в каждой паре соединим точки отрезком. Число точек пересечения проведенных n отрезков назовем характеристикой разбиения. Найдите среднее арифметическое характеристик по всем разбиениям.

Неравенства – 3

Полезные советы. 1. В неравенствах, содержащих квадраты или квадратные корни, иногда бывает полезно использовать идеи, характерные для работы с квадратными трехчленами из алгебры. Основные приемы здесь следующие:

- рассмотреть неравенство как квадратное относительно одной из переменных и выписать соответствующее условие на дискриминант;
- выделять полные квадраты (это особенно полезно, когда нужно избавиться от корней).

2. Если вам нужно оценить сумму дробей, полезно изменить дроби так, чтобы у них получился общий знаменатель. Обычно в роли такого знаменателя выступает сумма переменных, входящих в условие задачи.

1. Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

2. Положительные числа x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$

3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

4. Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ докажите, что

$$a^2 + 3(b^2 + c^2 + d^2)/4 \geqslant a(b + c + d).$$

5. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем

$$\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S \quad \text{для всех } i = 1, 2, 3.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1.$$

6. Числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что

$$(2 + a)(2 + b) \geqslant cd.$$

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В., Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *13 июля 2022 г.*

Неравенства – 3

Полезные советы. 1. В неравенствах, содержащих квадраты или квадратные корни, иногда бывает полезно использовать идеи, характерные для работы с квадратными трехчленами из алгебры. Основные приемы здесь следующие:

- рассмотреть неравенство как квадратное относительно одной из переменных и выписать соответствующее условие на дискриминант;
- выделять полные квадраты (это особенно полезно, когда нужно избавиться от корней).

2. Если вам нужно оценить сумму дробей, полезно изменить дроби так, чтобы у них получился общий знаменатель. Обычно в роли такого знаменателя выступает сумма переменных, входящих в условие задачи.

1. Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$a^2 + ab + b^2 \geqslant 3(a + b - 1).$$

2. Положительные числа x, y, z таковы, что модуль разности любых двух из них меньше 2. Докажите, что

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$

3. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

4. Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ докажите, что

$$a^2 + 3(b^2 + c^2 + d^2)/4 \geqslant a(b + c + d).$$

5. Сумма чисел a_1, a_2, a_3, каждое из которых больше единицы, равна S, причем

$$\frac{a_i^2}{a_i - 1} > S \quad \text{для всех } i = 1, 2, 3.$$

Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1.$$

6. Числа a, b, c и d таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Докажите, что

$$(2 + a)(2 + b) \geqslant cd.$$

Графы – 3

1. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

2. Дана доска $m \times n$, разбитая на клетки. Сначала в $(m-1)(n-1)+1$ клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись такие четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка. Тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски.

3. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q (p и q — взаимно простые числа). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Козеренко К. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *13 июля 2022 г.*

Графы – 3

1. Дан клетчатый прямоугольник $m \times n$. Каждую его клетку разрезали по одной из диагоналей. На какое наименьшее число частей мог распасться прямоугольник?

2. Дана доска $m \times n$, разбитая на клетки. Сначала в $(m-1)(n-1)+1$ клеток ставится по фишке. Пусть в некоторый момент на доске нашлись такие четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски, что ровно в одной из этих клеток стоит фишка. Тогда эту фишку можно снять. Докажите, что хотя бы одну фишку не удастся снять с доски.

3. Хозяйка испекла для гостей пирог. За столом может оказаться либо p человек, либо q (p и q — взаимно простые числа). На какое минимальное количество кусков (не обязательно равных) нужно заранее разрезать пирог, чтобы в любом случае его можно было раздать поровну?

Чётные числа

1. На плоскости нарисовано нечётное число единичных кругов. Докажите, что найдется центр одного из кругов, покрытый нечётное число раз кругами.

2. Можно ли расставить на рёбрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?

3. В ряд написаны n различных вещественных чисел. Инверсией называются два числа такие, что меньшее из них стоит правее большего. Тогда можно посчитать сколько пар чисел являются инверсиями. Докажите, что если поменять местами два произвольных элемента, четность числа инверсий изменится.

4. Зритель загадал 8 клеток шахматной доски общего положения (любые две не содержатся в одной строке или в одном столбце). Фокусник за ход выбирает 8 клеток и размещает на эти клетки 8 ферзей, после чего зритель сообщает, какие из ферзей стоят на загаданных клетках. Если число ферзей, стоящих на загаданных клетках чётно, то фокусник побеждает; в противном случае ферзи снимаются с шахматного поля и фокусник делает следующий ход. Сколько ходов понадобится фокуснику, чтобы победить, независимо от загаданных зрителем клеток?

5. 2020 друзей подошли к берегу реки и нашли лодку, вмещающую не более двух человек. Получится ли всем друзьям переправиться на другой берег так, чтобы каждые два друга побывали в лодке вместе ровно один раз (переправляясь либо в одну сторону, либо в другую)?

6. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, меж-ду которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет?

7. Дан 2022-угольник. Существует ли простая замкнутая 2022-звенная ломаная вершинами в вершинах этого многоугольника, у которой нет параллельных ребер?

[Летняя школа Лицея «Вторая школа»] Мехралиев А. Р.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *14 июля 2022 г.*

Чётные числа

1. На плоскости нарисовано нечётное число единичных кругов. Докажите, что найдется центр одного из кругов, покрытый нечётное число раз кругами.

2. Можно ли расставить на рёбрах куба 12 натуральных чисел так, чтобы суммы чисел на любых двух противоположных гранях отличались ровно на единицу?

3. В ряд написаны n различных вещественных чисел. Инверсией называются два числа такие, что меньшее из них стоит правее большего. Тогда можно посчитать сколько пар чисел являются инверсиями. Докажите, что если поменять местами два произвольных элемента, четность числа инверсий изменится.

4. Зритель загадал 8 клеток шахматной доски общего положения (любые две не содержатся в одной строке или в одном столбце). Фокусник за ход выбирает 8 клеток и размещает на эти клетки 8 ферзей, после чего зритель сообщает, какие из ферзей стоят на загаданных клетках. Если число ферзей, стоящих на загаданных клетках чётно, то фокусник побеждает; в противном случае ферзи снимаются с шахматного поля и фокусник делает следующий ход. Сколько ходов понадобится фокуснику, чтобы победить, независимо от загаданных зрителем клеток?

5. 2020 друзей подошли к берегу реки и нашли лодку, вмещающую не более двух человек. Получится ли всем друзьям переправиться на другой берег так, чтобы каждые два друга побывали в лодке вместе ровно один раз (переправляясь либо в одну сторону, либо в другую)?

6. За круглым столом сидят 40 человек. Может ли случиться, что у любых двух из них, между которыми сидит четное число человек, есть за столом общий знакомый, а у любых двух, меж-ду которыми сидит нечетное число человек, общего знакомого нет?

7. Дан 2022-угольник. Существует ли простая замкнутая 2022-звенная ломаная вершинами в вершинах этого многоугольника, у которой нет параллельных ребер?

Дополнительные построения-2

Сразу разбираем. В трапеции $ABCD$, где AD и BC параллельны, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.

1. В треугольнике ABC проовели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle ABD = 90°$ и $AD = BC + CD$. Найдите отношение AD к BC.

3. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение углов BAC и CBA.

4. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

5. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и N (N между M и B) такие, что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

8. CK — биссектриса треугольника ABC. На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что $\angle CTL = \angle ABC$.

9. Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и BC и продолжении стороны CD за точку D выбраны соответственно точки K, L и M так, что треугольники KLM и BCA равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок KM пересекает отрезок AD в точке N. Докажите, что $LN || AB$.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *14 июля 2022 г.*

Дополнительные построения-2

Сразу разбираем. В трапеции $ABCD$, где AD и BC параллельны, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении отрезка CD за вершину D отложен отрезок $DK = BC$. Докажите, что $AK = BK$.

1. В треугольнике ABC проовели медиану BM. Оказалось, что сумма углов A и C равна углу ABM. Найдите отношение медианы BM к стороне BC.

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle ABD = 90°$ и $AD = BC + CD$. Найдите отношение AD к BC.

3. Биссектрисы углов треугольника ABC пересекаются в точке I. Известно, что $CA + AI = BC$. Найдите отношение углов BAC и CBA.

4. На гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC выбрана такая точка D, что $BC = CD$. На катете BC взята такая точка E, что $DE = CE$. Докажите равенство $AD + BE = DE$.

5. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB взяты точки M и N (N между M и B) такие, что $\angle MCN = 45°$. Докажите, что $MN^2 = AM^2 + NB^2$.

6. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, причём прямая BE параллельна прямой CD и отрезок BE короче отрезка CD. Внутри пятиугольника выбраны точки F и G таким образом, что $ABCF$ и $AGDE$ — параллелограммы. Докажите, что $CD = BE + FG$.

7. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и BC выбраны точки M и N соответственно, причём $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника MBN не меньше стороны AC.

8. CK — биссектриса треугольника ABC. На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что $\angle CTL = \angle ABC$.

9. Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и BC и продолжении стороны CD за точку D выбраны соответственно точки K, L и M так, что треугольники KLM и BCA равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок KM пересекает отрезок AD в точке N. Докажите, что $LN || AB$.

Неравенства – 4

Определение. *Элементарные симметрические многочлены* от трех переменных:

$$\sigma_1 = a + b + c, \quad \sigma_2 = ab + bc + ca, \quad \sigma_3 = abc.$$

Теорема. Любой симметрический многочлен от переменных a, b, c можно представить как многочлен от $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Полезные неравенства для симметрических многочленов.

$$\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2, \quad \sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3, \quad \sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3.$$

1. **Формула Ньютона.** Пусть $s_k = a^k + b^k + c^k$. Докажите, что имеет место равенство

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

2. **(a)** Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$.

   (b) Выразите многочлен $f(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

   (c) Неравенство Коши для трех переменных. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc$. (Часто это неравенство применяется в следующем виде: $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.)

3. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27.$$

4. Для вещественных чисел x, y, $z \neq 1$, удовлетворяющих условию $xyz = 1$, докажите неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

   (*Указание*: попробуйте ввести обозначения вида $\dfrac{x}{x-1} = a$ и т.д.)

5. Для положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих неравенству

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4,$$

   докажите неравенство $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2} + \dfrac{bc+1}{(b+c)^2} + \dfrac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3$. (*Указание*: переобозначьте знаменатели дробей и запишите неравенства в новых переменных.)

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В., Шевцов А. А.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *15 июля 2022 г.*

Неравенства – 4

Определение. *Элементарные симметрические многочлены* от трех переменных:

$$\sigma_1 = a + b + c, \quad \sigma_2 = ab + bc + ca, \quad \sigma_3 = abc.$$

Теорема. Любой симметрический многочлен от переменных a, b, c можно представить как многочлен от $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Полезные неравенства для симметрических многочленов.

$$\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2, \quad \sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3, \quad \sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3.$$

1. **Формула Ньютона.** Пусть $s_k = a^k + b^k + c^k$. Докажите, что имеет место равенство

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

2. **(a)** Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство $\dfrac{x+y+z}{3} \leqslant \sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$.

   (b) Выразите многочлен $f(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

   (c) Неравенство Коши для трех переменных. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant abc$. (Часто это неравенство применяется в следующем виде: $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.)

3. Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geqslant 27.$$

4. Для вещественных чисел x, y, $z \neq 1$, удовлетворяющих условию $xyz = 1$, докажите неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1.$$

   (*Указание*: попробуйте ввести обозначения вида $\dfrac{x}{x-1} = a$ и т.д.)

5. Для положительных чисел a, b, c, удовлетворяющих неравенству

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a+b+c)^2 \leqslant 4,$$

   докажите неравенство $\dfrac{ab+1}{(a+b)^2} + \dfrac{bc+1}{(b+c)^2} + \dfrac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3$. (*Указание*: переобозначьте знаменатели дробей и запишите неравенства в новых переменных.)

Догадливая геометрия

1. Из центров вневписанных окружностей провели прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что эти три прямых пересекаются в одной точке.

2. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N так, что $AC = CM$ и $BN = MN$. Высота треугольника, проведенная из вершины B, пересекает отрезок CM в точке P. Докажите, что NP — биссектриса угла $\angle MNC$.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам CD и BC. Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой AC.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки M и N так, что $MA = AC = CN$. Отрезки AN и CM пересеклись в точке P. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки P на сторону AC, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω, восстановленная в вершине B, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке P. Касательная к ω, восстановленная в вершине C, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AC, в точке Q. Докажите, что прямая PQ касается ω.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Бибиков П. В.
[*июль 2022 г.*] группа: 8-2 *18 июля 2022 г.*

Догадливая геометрия

1. Из центров вневписанных окружностей провели прямые, перпендикулярные соответствующим сторонам. Докажите, что эти три прямых пересекаются в одной точке.

2. На равных сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки M и N так, что $AC = CM$ и $BN = MN$. Высота треугольника, проведенная из вершины B, пересекает отрезок CM в точке P. Докажите, что NP — биссектриса угла $\angle MNC$.

3. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Через середины сторон AB и AD проведены прямые, соответственно перпендикулярные противоположным сторонам CD и BC. Докажите, что эти прямые пересекаются на прямой AC.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли соответственно точки M и N так, что $MA = AC = CN$. Отрезки AN и CM пересеклись в точке P. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки P на сторону AC, проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Касательная к ω, восстановленная в вершине B, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AB, в точке P. Касательная к ω, восстановленная в вершине C, пересекает прямую, проходящую через O и параллельную AC, в точке Q. Докажите, что прямая PQ касается ω.

Числа Каталана – 1: триангуляции

Определение и рекуррентная формула

Мы начнем этот сюжет с простой геометрической задачи, которая возникла у нас еще в 7 классе: *чему равна сумма углов n-угольника?* Ответ хорошо известен: $(n-2)\cdot 180°$. Однако нам будет важен не ответ, а решение этой задачи. Напомним, что для доказательства необходимо разбить наш многоугольник непересекающимися диагоналями на треугольники. Эта процедура называется *триангуляцией* и играет большую роль в математике. Отметим, что существование триангуляции для *произвольного* многоугольника совершенно неочевидно. Однако если наш n-угольник *выпуклый*, то триангуляцию легко получить, проведя все диагонали из одной вершины. Поэтому далее, если не оговорено противного, мы будем рассматривать только выпуклые n-угольники.

Заметим, что для выпуклого n-угольника существует много триангуляций. Леонард Эйлер задал совершенно естественный вопрос: *сколько существует различных триангуляций выпуклого n-угольника?* Как ни странно, ответ на этот вроде бы простой вопрос далеко неочевиден и связан с большим количеством других интересных задач из комбинаторной геометрии.

По некоторым причинам мы будем рассматривать выпуклые $(n+1)$-угольники, сдвинув индекс n на 1. Делается это для того, чтобы согласовать получившиеся ответы с общепринятыми обозначениями. А именно, обозначим количество триангуляций выпуклого $(n+1)$-угольника через c_n. Числа c_n называются *числами Каталана*.

Конечно же, естественным является желание найти явную формулу для c_n. Удивительно, но в этой задаче *главным является не явная формула для c_n, а соображения, приводящие к ней*!

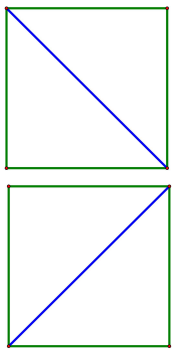


Рис. 1:

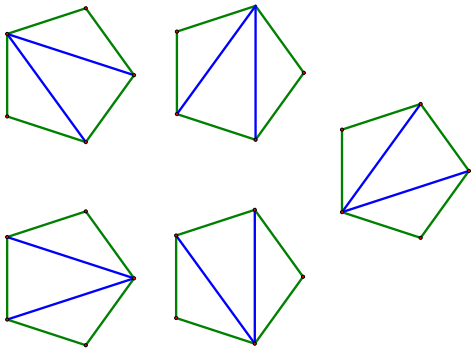


Рис. 2:

Перед тем, как выводить какие-либо формулы, давайте попробуем просто вычислить руками первые несколько чисел Каталана. Во-первых, по определению полагают $c_1 = 1$ (в комбинаторике так часто бывает: если какого-то объекта не существует (в нашем случае — двуугольника), то есть ровно один способ сделать с ним что-то — ничего не делать). Далее, $c_2 = 1$, поскольку треугольник разбивать на треугольники не нужно. А вот $c_3 = 2$, поскольку в четырехугольнике можно провести либо одну диагональ, либо другую (см. рис. 1).

Также легко руками посчитать $c_4 = 5$ (см. рис. 2). Но вот перебор триангуляций шестиугольника уже представляет определенную сложность. Разумеется, можно заметить в этих триангуляциях некоторую закономерность (например, пучок диагоналей, молния и звезда Давида, см. рис. 3), но все это не позволит нам обобщить наши рассуждения для произвольного $(n+1)$-угольника. Поэтому поступим по-другому.

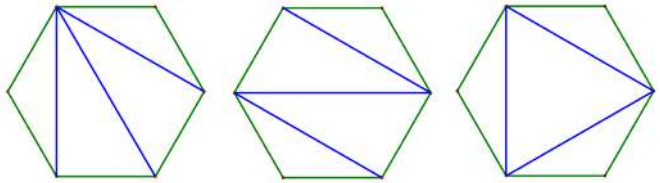


Рис. 3:

Идея, позволяющая вычислить c_5, а за ним и c_6, c_7, ..., заключается в простом наблюдении: нужно разбить большой $(n+1)$-угольник на два маленьких многоугольника с меньшим числом сторон. Тогда триангуляция двух этих маленьких многоугольников даст нам триангуляцию исходного $(n+1)$-угольника. Давайте реализуем этот подход на примере шестиугольника.

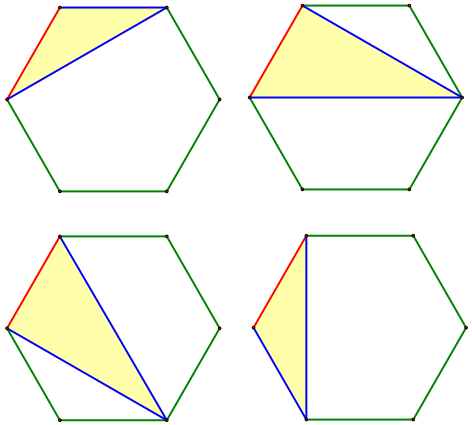


Рис. 4:

Зафиксируем одну сторону шестиугольника. Эта сторона принадлежит единственному треугольнику, который получается в результате триангуляции. Таких треугольников может быть ровно четыре (см. рис. 4):

- первый отсекает от шестиугольника пятиугольник,
- второй отсекает треугольник и четырехугольник,
- третий отсекает четырехугольник и треугольник,
- четвертый отсекает от шестиугольника пятиугольник.

Осталось посчитать количество триангуляций в каждом из случаев, а затем сложить получившиеся ответы. Итого, находим:

$$c_5 = 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 = 14.$$

Удобно записать это выражение только через числа c_k:

$$c_5 = c_1 \cdot c_4 + c_2 \cdot c_3 + c_3 \cdot c_2 + c_4 \cdot c_1.$$

Абсолютно аналогично можно вывести общую рекуррентную формулу для c_n. Для этого мы точно также фиксируем сторону и рассматриваем всевозможные треугольники, содержащие эту сторону. Тогда такой треугольник делит наш $(n+1)$-угольник на две части, причем если в первой содержится $(k+1)$ сторона, то во второй будет $(n-k+1)$ сторона. Триангулировать первый многоугольник можно c_k способами, а второй — c_{n-k} способами. Значит, итого $c_k c_{n-k}$ способов. Осталось просуммировать эти выражения по всем k от 1 до $n-1$. В результате получается следующая замечательная формула:

$$c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} + c_3 c_{n-3} + \ldots + c_{n-3} c_3 + c_{n-2} c_2 + c_{n-1} c_1. \qquad (1)$$

Обратите внимание, что получившееся выражение симметрично: первое слагаемое равно последнему, второе — предпоследнему, и т.д. Также во всех слагаемых сумма индексов постоянна и равна n.

Формула (1) позволяет последовательно вычислять числа Каталана. Сделав это для небольших индексов n, мы получим следующую последовательность:

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, ...

Триангуляции и многоугольники

1. **Лемма об ушах.** Выпуклый n-угольник $(n > 3)$ триангулирован. Докажите, что найдутся хотя бы два треугольника, у которых две стороны совпадают со сторонами многоугольника («уши»).

2. Выпуклый многоугольник разрезан диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике есть две равные стороны.

3. **(a)** Докажите, что для всякой триангуляции выпуклого многоугольника можно покрасить вершины этого многоугольника в три цвета так, чтобы вершины, соединенные стороной многоугольника или диагональю, были покрашены в разные цвета.

   (b) Докажите, что для всякой триангуляции выпуклого многоугольника можно покрасить треугольники триангуляции в два цвета так, что имеющие общую сторону треугольники будут разного цвета.

4. Выпуклый многоугольник триангулирован. Назовем *флипом* следующую операцию: в четырехугольнике, все стороны которого являются сторонами многоугольника или диагоналями триангуляции, одна диагональ меняется на другую. Докажите, что флипами из любой триангуляции можно получить любую другую.

5. Докажите, что выпуклый многоугольник может быть разрезан непересекающимися диагоналями на остроугольные треугольники не более, чем одним способом.

6. Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя провести больше $n-3$ диагоналей, не имеющих общих внутренних точек.

7. Выпуклый n-угольник разбит на q четырехугольников, из которых b невыпуклых. Докажите, что $q \geqslant b + \dfrac{n-2}{2}$.

8.* Найти все $n \geqslant 3$, для которых правильный n-угольник можно триангулировать на равнобедренные треугольники.

Числа Каталана – 2: соответствия и биекции

Комбинаторная геометрия

Посмотрим, в каких комбинаторных конструкциях. Отметим, что центральной идеей, указывающей на возникновение чисел Каталана, является возможность разбить какой-то большой объект на две маленькие части. Это разбиение приводит к формуле $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$, поэтому для доказательства следующих утверждений нам достаточно просто предъявить такое разбиение. Вот несколько примеров.

Задача 1. На окружности отмечены 18 точек. Сколькими способами можно разбить их на пары хордами так, чтобы эти хорды не пересекались?

Задача 2. Сколькими способами можно разбить на пары 20 точек, расположенных на одной прямой, так, чтобы дуги, соединяющие точки из одной пары, не пересекались бы?

Решение. Мы приведем решение только первой задачи, поскольку решение второй полностью аналогично. Обозначим через d_n количество способов соединить $2(n-1)$ точек на окружности непересекающимися хордами. Легко видеть, что $d_1 = 1$ и $d_2 = 1$. Если мы докажем, что числа d_n удовлетворяют соотношению $d_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k d_{n-k}$, то отсюда будет следовать, что $d_n = c_n$ — числа Каталана. Поэтому достаточно доказать соотношение для последовательности $\{d_n\}$. Для этого реализуем идею разбиения множества на две меньшие части. Предположим, что мы провели какую-то хорду, соединяющую две точки. Тогда эта хорда поделит окружность на две дуги, на одной из которых будет лежать $2(k-1)$ точек (если на дуге лежит нечетное количество точек, их невозможно разбить на пары), а на другой — $2(n-k-1)$ точек. Суммируя получившиеся произведения по k от 1 до $n-1$, получаем:

$$d_n = d_1 d_{n-1} + d_2 d_{n-2} + d_3 d_{n-3} + \ldots + d_{n-3} d_3 + d_{n-2} d_2 + d_{n-1} d_1.$$

Тем самым начальные данные последовательностей $\{c_n\}$ и $\{d_n\}$ совпадают, а также совпадают рекуррентные соотношения для последующих членов. Отсюда следует, что $d_n = c_n$, что и требовалось доказать. В частности, $d_9 = c_9 = 1430$.

Теперь решим еще одну комбинаторную задачу, приводящую к числам Каталана. Рассмотрим произведение n чисел $x_1 x_2 \ldots x_n$. Разумеется, порядок, в котором мы перемножаем эти числа, не важен для получения конечного результата (это свойство ассоциативности умножения). Однако промежуточные результаты будут различаться. Поэтому можно поставить вопрос: сколькими способами можно расставить скобки в произведении n сомножителей?

Оказывается, этих способов в точности c_n. Докажем это. Как и раньше, нам необходимо разбить большое произведение на два маленьких. Сделать это можно так: рассмотрим умножение, которое выполняется последним. Тогда две пары скобок стоят так: $(x_1 \ldots x_k) \cdot (x_{k+1} \ldots x_n)$ (внутри этих скобок стоят и другие скобки, но нам они не важны). Первые k чисел можно скомбинировать c_k способами, а последние $(n-k)$ — c_{n-k} способами. Суммируя по k, получаем соотношение $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$. Вместе с начальными данными $c_1 = c_2 = 1$ мы получаем последовательность Каталана.

Эту конструкцию скобочных произведений можно немножко изменить, убрав из рассмотрения числа x_i и оставив только скобки.

Утверждение. Назовем расстановку открывающихся и закрывающихся скобок *правильной*, если открывающихся и закрывающихся скобок равное количество, и на каждом отрезке открывающихся скобок не меньше закрывающихся. Тогда существует в точности c_n правильных расстановок n пар скобок.

Доказательство. Разумеется, можно опять разбить множество скобок на две меньшие части и получить рекуррентную формулу $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}$. Однако мы поступим хитрее. В комбинаторике часто оказывается полезным установление прямых аналогий между различными задачами, приводящими к одному и тому же ответу. Покажем, как можно получить правильную расстановку скобок из скобочного произведения. Рассмотрим, например, произведение $((((ab)(cd))(ef))(gh))$. Сотрем все закрывающиеся скобки, заменим все буквы на закрывающиеся скобки и сотрем последнюю закрывающуюся скобку. В результате получится правильная расстановка скобок ((((())())())(). Остается заметить, что, во-первых, разные скобочные произведения приводят к разным расстановкам скобок (*инъекция*), а во-вторых, каждая правильная расстановка скобок получается таким образом (для этого достаточно просто провести все операции в обратном порядке; *сюръекция*). Таким образом, мы получаем *биекцию* между скобочными произведениями и правильными расстановками скобок. Значит, количество тех и других совпадает.

Замечание. Возникает естественный вопрос: а можно ли таким же прямым образом установить биекцию между триангуляциями выпуклых многоугольников и скобочными произведениями? Можно ли установить такую связь между геометрией и алгеброй?! Оказывается, это возможно! Следующая конструкция была предложена Фордером в 1961 г.

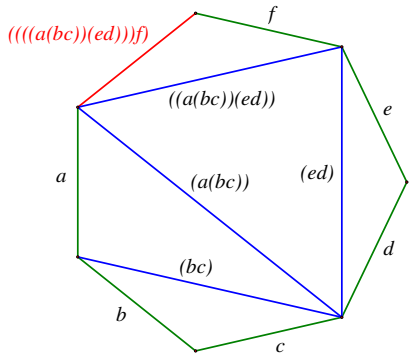


Рис. 1:

Зафиксируем сторону $(n+1)$-угольника и напишем числа x_1, ..., x_n на каждой из остав-

шихся сторон (на рис. 1 вместо x_i для наглядности написаны a, b, c, d, e, f). Теперь будем составлять скобочное произведение по следующему правилу. Берем треугольник из триангуляции, на двух сторонах которого написаны буквы (например, x_1 и x_2). Пишем на третьей стороне произведение (x_1x_2). Продолжаем делать подобную процедуру со всеми оставшимися треугольниками. В результате на выделенной стороне $(n+1)$-угольника окажется записанным скобочное произведение (см. рис. 1)! Несложно доказать, что такое сопоставление триангуляции скобочного произведения является биекцией.

Если Вы немного знакомы с программированием, то, возможно, Вы узнали в определении правильной расстановки скобок так называемую *польскую запись*. Суть ее заключается в следующем. Вместо записи $a * b$ напишем $ab*$, где $*$ — какая-то операция (например, умножение). Последовательно повторяя эту процедуру, мы избавимся от скобок и получим польскую запись данного арифметического выражения. Например, выражению

$$((1-2)+(3+4)) : ((5-6)\cdot 7 - 8\cdot 9)$$

соответствует польская запись

$$12-34++56-7\cdot 89\cdot -:.$$

Обратите внимание, что операция деления, выполняемая последней, действительно стоит на последнем месте! Именно польская запись позволяет реализовать на компьютере стековый калькулятор.

Теперь вернемся к числам Каталана. Запишем скобочное произведение n чисел в польской записи. Более точно, сопоставим каждому скобочному произведению слово из букв a и p (буква p соответствует операции произведения; для удобства мы пишем букву, а не значок $\cdot$) по следующему правилу:

- если выражение состоит из одной буквы, пишем a;
- если скобочным выражениям U и V сопоставлены слова u и v, то произведению $(U\cdot V)$ сопоставим uvp.

Например,

$$(x_1(x_2x_3))(x_4x_5) \mapsto (x_1aap)(aap) \mapsto (aaapp)(aap) \mapsto aaappaapp.$$

Таким образом, каждому скобочному произведению можно сопоставить слово из n букв a и $(n-1)$-й буквы p. Если мы поймем, сколько существует таких слов, мы одновременно сумеем найти явную формулу для чисел Каталана c_n. Кажется, что таких слов в точности C_{2n-1}^{n-1}, и это действительно так.

Однако не каждое слово из n букв a и $(n-1)$-й буквы p может быть сопоставлено скобочному произведению. Например, последней буквой всегда должна быть буква p, а перед первой буквой p должно быть как минимум две буквы a (это не единственные условия, но самые очевидные). Чудо в том, что какое бы слово из n букв a и $(n-1)$-й буквы p мы ни взяли, из него можно получить *ровно одно* слово, соответствующее скобочному произведению, с помощью *циклического сдвига* его букв.

Замечание. Циклический сдвиг букв в слове определяется так: если есть слово $a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_n$, то циклическим сдвигом получается слово $a_{k+1}\ldots a_na_1a_2\ldots a_k$. Иначе говоря, циклический сдвиг букв в слове — это прибавление ко всем индексам букв фиксированного числа k по модулю n.

Докажем это утверждение индукцией по n. Сначала циклическим сдвигом добьемся того, чтобы наше слово оканчивалось на букву p (о необходимости этого мы говорили выше). Далее, по принципу Дирихле найдется такая буква p, перед которой стоят две буквы a (в противном случае букв a не больше, чем букв p). Заменим слово aap буквой a (это означает, что мы заменили произведение двух сомножителей на результат этого произведения). Мы получили слово, в котором $n-1$ буква a и $n-2$ буквы p, поэтому к нему можно применить предположение индукции.

Итак, из каждого набора $2n-1$ слов, получаемых друг из друга циклическими сдвигами, нам подходит ровно одно. Поэтому

$$c_n = \frac{1}{2n-1}C_{2n-1}^{n-1}. \tag{1}$$

Это и есть явная формула для чисел Каталана!

Замечание. С помощью формулы (1) можно ответить на вопрос, как быстро растут числа Каталана c_n с ростом n. Такие утверждения в математике называются *асимптотиками*: мы сравниваем рост чисел последовательности с ростом привычных нам функций: n, n^2, 2^n, ... Это позволяет создать представление о характере поведения чисел последовательности при больших n, когда вычислять их точно очень трудно (да и нет в этом необходимости).

Чтобы найти асимптотику чисел Каталана c_n, нам необходима асимптотика чисел $n!$ (поскольку из них состоит биномиальный коэффициент C_{2n}^n). Имеет место замечательная формула, называемая *формулой Стирлинга*:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(значок $\sim$ читается как «асимптотически равно»; строго это означает, что отношение левой и правой частей стремится к 1 при $n\to\infty$). Удивительным образом в этом формуле присутствуют две важнейшие математические константы: e (с которой мы уже встречались выше) и π (то-самое отношение длины окружности к диаметру, которое нам известно из геометрии)!

Воспользуемся теперь формулой (1) и применим формулу Стирлинга:

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{n+1}\frac{\sqrt{2\pi\cdot 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}(n+1)}.$$

Заметим, что при больших n величины n и $n+1$ асимптотически равны (их отношение равно $1+1/n$ и близко к 1 при больших n). Поэтому можно заменить в последней формуле число $n+1$ на n и окончательно получить асимптотическую формулу

$$c_{n+1} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}n^{3/2}}.$$

Соответствия и биекции

1. Опишите биекцию между следующими классами объектов:

(a) последовательности длины n из 0 и 1 $\leftrightarrow$ подмножества множества из n элементов;

(b) пути хромой ладьи на шахматной доске из клетка a1 до клетки h8 (хромая ладья умеет ходить или на одну клетку вправо, или на одну клетку вверх) $\leftrightarrow$ выборы 7 шариков из набора, содержащего 7 белых и 7 черных шариков;

(c) замощения прямоугольника $2 \times n$ доминошками $1 \times 2 \leftrightarrow$ последовательности длины $n-1$ из 0 и 1, в которых две единицы не стоят рядом.

2. Пусть S — множество из 16 точек общего положения на плоскости. Обозначим через $\chi(S)$ количество способов провести 8 непересекающихся отрезков с концами в этих точках (отрезки не должны пересекаться даже по концам). Найти наименьшее возможное значение $\chi(S)$.

3. Правильный треугольник со стороной n разбит на n^2 правильных треугольничков со стороной 1. Сколько существует параллелограммов, состоящих из этих треугольничков?

4. *Разбиением натурального числа* n назовем разложение этого числа в сумму (возможно, совпадающих) натуральных чисел. Разбиения, отличающиеся порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Докажите, что

(a) количество разбиений числа n равно количеству диаграмм из n клеток, строчки которых выровнены по левому краю и длина каждой следующей строки не больше длины предыдущей строки (такие диаграннмы называются *диаграммами Юнга*);

(b) количество разбиений числа n на ровно k натуральных слагаемых равно количеству разбиений числа n на слагаемые, наибольшее из которых равно k.

(c) количество разбиений числа n равно количеству разбиений числа $2n$ на n слагаемых;

(d) количество разбиений числа n на различные слагаемые равно количеству разбиений числа n на нечетные слагаемые;

5. Рассматриваются всевозможные последовательности длины n, состоящие из 0 и 1. Обозначим через a_n количество таких последовательностей, не содержащих фрагмента $(0,1,0)$, а через b_n — количество таких последовательностей, не содержащих фрагментов $(0,0,1,1)$ и $(1,1,0,0)$. Докажите, что $b_{n+1} = 2a_n$.

6. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}^2$ пар точек с целыми координатами и будем изучать пути из точки $(0,0)$ в точку $(2n,0)$ (где $n \geqslant 0$ — целое число), которые проходят по узлам целочисленной решетки и состоят из диагоналей маленьких клеточек.

(a) Сколько существует таких путей?

(b) Докажите, что путей, лежащих в верхней полуплоскости относительно оси Ox (мы считаем, что точки оси Ox также принадлежат верхней полуплоскости), ровно c_{n+1}.

(c) Докажите, что путей, лежащих в верхней полуплоскости, столько же, сколько путей, которые ведут из точки $(0,0)$ в точку $(2n,-1)$. Выведите отсюда явную формулу для чисел Каталана.

7.* Пусть n — натуральное число. Каждая точка (x,y) на координатной плоскости с целыми неотрицательными координатами x, y, такими, что $x+y<n$, окрашена или в красный, или в синий цвет по следующему правилу. Если точка (x,y) красная, то красными также являются все точки (x',y'), где $x' \leqslant x$ и $y' \leqslant y$. Пусть A — это количество способов выбрать n синих точек с попарно разными x-координатами, а B — количество способов выбрать n синих точек с попарно разными y-координатами. Докажите, что $A=B$.

Группа 9-10-1

Последовательности

1. Последовательность x_n определена следующими условиями: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Существует ли такое натуральное число k, что ни один из членов последовательности x_n не делится на k?

2. Пусть $a_0, a_1, a_2, ...$ бесконечная последовательность действительных чисел, удовлетворяющих уравнению $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$ для всех $n \geqslant 0$, где a_0 и a_1 два различных положительных действительных числа. Может ли последовательность $a_0, a_1, a_2, ...$ быть ограниченой?

3. Последовательность натуральных чисел такова, что НОД(a_i, a_j) = НОД(i, ,j). Докажите, что для всех номеров $a_i = i$.

4. Последовательность натуральных чисел строится по следующему правилу. Каждый член, начиная с третьего, равен частному от деления суммы двух предыдущих на их НОД. Оказалось, что данная последовательность ограничена. Найдите первые два члена.

5. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ натуральных чисел удовлетворяет условиям:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \text{если } \sqrt{a_n} \text{ целое число} \\ a_n + 3, & \text{иначе} \end{cases}$$

для всех $n \geqslant 0$. Вычислите все значения $a_0 > 1$ для которых существует хотя бы одно a такое, что $a_n = a$ для бесконечного числа n.

6. Последовательность (a_n) определена рекуррентно следующим образом $a_0 = a_1 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - a_n - 1$ для любого n. Докажите, что

$$a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 1 \vdots a_n$$

для всех n.

7. Последовательность вещественных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ задается правилом $a_0 = 1$ и

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0.$$

Докажите, что $a_n < 0$ для всех n.

8. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ определена соотношениями

$$x_1 = 1 \text{ и } x_{2k} = -x_k, x_{2k-1} = (-1)^{k+1}x_k \text{ для всех } k \geqslant 1.$$

Докажите, что для любого n большего нуля $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant 0$.

9. Предположим $s_1, s_2, s_3, \ldots$ строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что подпоследовательности

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \text{ и } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

обе являются арифметическими прогрессиями. Докажите, что исходная последовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ тоже является арифметической последовательностью.

10. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет соотношениям

$$a_n = -\max_{i+j=n}(a_i + a_j) \text{для всех } n > 2017.$$

Докажите, что последовательность ограничена.

Последовательности. Многоходовые задачи.

9. Предположим $s_1, s_2, s_3, \ldots$ строго возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что подпоследовательности

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \text{ и } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

обе являются арифметическими прогрессиями. Докажите, что исходная последовательность $s_1, s_2, s_3, \ldots$ тоже является арифметической последовательностью.

(a) Введите последовательность $d_n = s_{n+1} - s_n$. Переформулируйте условие задачи в терминах этой последовательности и докажите, что она ограничена.

(b) Рассмотрите минимальное и максимальные значения последовательности d_n. Оцените разность $s_{s_{i+1}} - s_{s_i}$ числом Mn сверху и снизу для i таких, что $d_i = m, M$.

(c) Проверьте, что d_{s_i} образуют арифметическую прогрессию и выведите из этого, что $m = M$.

10. Последовательность действительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет соотношениям

$$a_n = -\max_{i+j=n}(a_i + a_j) \text{для всех } n > 2017.$$

Докажите, что последовательность ограничена.

(a) Введите последовательности

$$m_n = \max_{k<n}(-a_k) \quad \text{и} \quad \max_{k<n} a_k,$$

заметьте, что они не убывающие и переформулируйте требуемое в терминах этих последовательностей.

(b) Докажите следующие формулы:

$$m_{n+1} \leqslant \max(m_n, 2M_n); \quad M_{n+1} \leqslant \max(M_n, m_n - M_n)$$

(c) Рассмотрите два случая $m_n \leqslant 2M_n$ и $m_n > 2M_n$ и докажите, что исходная последовательность ограничены в каждом из этих случаев.

Квадрики и кубики

Теорема Паскаля. Рассмотрим произвольную непустую кривую K, заданную квадратичным многочленом, и отметим на ней шесть точек A_1, ..., A_6. Обозначим через ℓ_i прямые A_iA_{i+1} (здесь $i = 1, ..., 6$). Положим также $P_i = \ell_i \cap \ell_{i+3}$ (здесь $i = 1, 2, 3$ и сложение индексов осуществляется по модулю 6). Тогда точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой.

Доказательство 1. Рассмотрим кубику $Q = K \cdot p$, где $p = P_1P_2$. Кроме того, рассмотрим две кубики $q_1 = \ell_1\ell_3\ell_5$ и $q_2 = \ell_2\ell_4\ell_6$. Заметим, что все три кубики Q, q_1, q_2 проходят через точки A_i, P_1 и P_2. Множество кубик, проходящих через эти точки, является векторным пространством размерности 2, и $\{q_1, q_2\}$ — его базис. Поэтому существуют такие числа λ_1 и λ_2, что $Q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2$. На q_1, q_2 лежит точка P_3, поэтому $P_3 \in K \cdot p$. Но $P_3 \notin K$, поэтому $P_3 \in p$, что и требовалось.

Доказательство 2. Рассмотрим кубику $W = \ell_1\ell_3\ell_5 + \alpha\ell_2\ell_4\ell_6$, где коэффициент α выбран так, чтобы кубика W пересекала бы квадрику K в дополнительной фиксированной точке F. Тогда кубика W и коника K пересекаются в семи точках A_i, F (где $i = 1, ..., 6$), а потому по теореме Безу (формулировку см. ниже) W делится на K: $W = K \cdot p$, где $\deg p = \deg W - \deg K = 1$. Получается, что все точки кубики W, не лежащие на квадрике K, лежат на прямой p. Точки P_1, P_2 и P_3 не лежат на K, а потому лежат на p.

Замечание. Во многих (но не во всех!) задачах далее можно считать квадрику окружностью.

1. **Теорема Паппа.** Даны две прямые ℓ и m. На прямой ℓ отмечены точки L_i, а на прямой m — точки M_j, где $i, j = 1, 2, 3$. Пусть $P_i = L_iM_{i+1} \cap L_{i+1}M_i$, где $i = 1, 2, 3$. Докажите, что точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой.

2. Пусть квадрика K проходит через точки A, B, C, D. Обозначим через ℓ_{AB} уравнение прямой AB, и т.д. Докажите, что найдутся такие числа λ и μ, для которых верно равенство
$$K = \lambda\ell_{AB} \cdot \ell_{CD} + \mu\ell_{BC} \cdot \ell_{AD}.$$

3. **Теорема о девяти точках на кубике.** Даны шесть прямых ℓ_i, m_j, $i, j = 1, 2, 3$ общего положения. Пусть $A_{ij} := \ell_i \cap m_j$. Кубика K проходит через точки A_{ij} для всех i, j, за исключением, быть может, точки A_{33}. Докажите, что тем не менее точка A_{33} лежит на K.

4. Восьмиугольник вписан в квадрику. Обозначим через ℓ_i, $i = 1, ..., 8$ прямые, последовательно содержащие его стороны. Докажите, что точки пересечения прямых ℓ_i и ℓ_{i+3} лежат на одной квадрике.

5. **(a)** В квадрику K вписаны два четырехугольника $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Обозначим через $XYZT$ четырехвершинник, образованный прямыми AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 (т.е. его стороны последовательно лежат на указанных прямых). Также отметим точки U и V пересечения прямых AC и BD, A_1C_1 и B_1D_1 соответственно. Докажите, что точки X, Y, Z, T, U и V лежат на одной квадрике.

   (b) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Проведем биссектрисы его углов и обозначим через X, Y, Z и T точки пересечения двух соседних биссектрис. Обозначим также через O центр окружности $(ABCD)$ и через P точку пересечения его диагоналей. Докажите, что точки X, Y, Z, T, O и P лежат на одной квадрике.

6. **Теорема Штейнера.** На квадрике K выбраны точки A_1, ..., A_6. Докажите, что прямые Паскаля шестивершинников
$$A_1A_2A_3A_4A_5A_6, \quad A_1A_4A_5A_2A_3A_6, \quad A_1A_4A_3A_6A_5A_2$$
   пересекаются в одной точке.

7. **(a)** Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые BC и AD — в точке Q. Кубика K проходит через точки A, B, C, D, P и Q. Докажите, что касательные к кубике K, проведенные в точках P и Q, пересекаются на K.

   (b) Прямая пересекает кубику в точках A, B и C. Касательные к кубике, проведнные в этих точках, повторно пересекают ее в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

   Указание. Наличие касательных указывает на то, что какие-то точки или прямые склеиваются...

8.* **Теорема Безу.** Пусть $P, Q \in \mathbb{R}[x, y]$, $\deg P = n$, $\deg Q = m$, многочлен Q неприводим и кривые P и Q пересекаются не менее чем в $mn + 1$ точке (с учетом кратности). Докажите, что тогда многочлен P делится на многочлен Q.

Основы проективной геометрии

Пусть l_1, l_2 — прямые на плоскости.

Центральным проектированием прямой l_1 на прямую l_2 из точки $O \notin l_1, l_2$ называется отображение, сопоставляющее точке $A \in l_1$ точку $(OA) \cap l_2$.

Параллельным проектированием прямой l_1 на прямую l_2 вдоль прямой $l \nparallel l_1, l_2$ называется отображение, сопоставляющее точке $A \in l_1$ точку $B \in l_2$ такую, что $AB \parallel l$.

1. В какой точке прямой l_1 центральное проектирование не определено? Какая точка прямой l_2 при центральном проектировании не имеет прообраза?

Проективной прямой называется прямая с дополнительной точкой ∞, называемой *бесконечно удаленной*. Как центральное, так и параллельное проектирование задает взаимно-однозначное соответствие проективных прямых. В дальнейшем все прямые считаются проективными, т.е. снабженными бесконечно удаленной точкой. *Проективным преобразованием* проективной прямой называется композиция нескольких центральных и параллельных проектирований.

2. Композиция проективных преобразований проективна. Преобразование, обратное к проективному, также проективно.

1. Для любых двух троек точек $A_1, B_1, C_1 \in l_1$ и $A_2, B_2, C_2 \in l_2$ существует проективное преобразование прямой l_1 в прямую l_2, переводящие точки A_1, B_1, C_1 в точки A_2, B_2, C_2.

2. Такое преобразование единственно.

Ключевой идея, необходимая для решения задачи 2 — построение *инварианта* проективных преобразований. Пусть A, B, C, D — различные не бесконечно удаленные точки прямой l_1. *Двойным отношением (cross ratio)* этой четверки называется величина

$$(ABCD) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}.$$

3. Как следует модифицировать определение двойного отношения для случая, когда одна из точек бесконечно удаленная?

4. Двойное отношение сохраняется при проективных преобразованиях. *Указание:* воспользуйтесь формулой площади треугольника через произведение сторон и синус угла между ними.

5. Пусть $(ABCD) = \lambda$. Какие значения может принимать двойное отношение тех же точек, если их взять в другом порядке? Сколько может быть этих значений?

6. **Теорема Паппа.** Пусть A_1, B_1, C_1 — точки на прямой l_1, а A_2, B_2, C_2 — точки на прямой l_2. Пусть $X = (A_1B_2) \cap (A_2B_1), Y = (A_1C_2) \cap (A_2C_1), Z = (B_1C_2) \cap (B_2C_1)$. Тогда точки X, Y, Z лежат на одной прямой. *Указание:* Рассмотрите следующую композицию центральных проекций: сначала центральная проекция прямой A_2B_1 на прямую l_2 из точки A_1, затем центральная проекция прямой l_2 на прямую B_1C_2 из точки C_1. Докажите, что эта композиция совпадает с центральной проекцией из точки Y.

7. **Теорема Дезарга.** Пусть $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ — два треугольника на плоскости таких, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке. Пусть $A' = (B_1C_1) \cap (B_2C_2), B' = (A_1C_1) \cap (A_2C_2), C' = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$. Тогда точки A', B', C' лежат на одной прямой.

8. Найдите общий вид проективного преобразования в координатах.

Гармонические четверки

На прямой

Четверка точек A, B, C, D на проективной прямой называется *гармонической*, если $(ABCD) = -1$. Говорят также, что пара точек A, B *гармонически делит* пару точек C, D.

1. Пусть A, B, C, D — четверка точек на прямой l. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны: 1) четверка A, B, C, D гармоническая; 2) $(ABCD) = (BACD)$; 3) существуют такие точки P, Q, R, S на плоскости, что $A = (PQ) \cap (RS), B = (PS) \cap (QR), C = (QS) \cap l, D = (PR) \cap l$.

2. Проверьте, что следующие четверки точек гармонические: **(a)** A, B, M, ∞, где M — середина отрезка AB; **(b)** середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции; **(c)** вершины A, C и основания внутренней и внешней биссектрис угла B треугольника ABC; **(d)** точки A, B, C, D, где AB — диаметр некоторой окружности, а точки C, D переходят друг в друга при инверсии относительно этой окружности.

3. Точка O лежит на высоте BH треугольника ABC. Прямые AO и BC пересекаются в точке A_1, прямые CO и AB — в точке C_1. Докажите, что $\angle BHA_1 = \angle BHC_1$.

4. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Биссектриса угла ADB пересекает AB в точке C_1, а биссектриса угла BDC пересекает BC в точке A_1. Докажите, что AA_1 и CC_1 пересекаются на отрезке BD.

5. Дан треугольник ABC. Обозначим через H_a, L_a основания высоты и биссектрисы из вершины A, а через K_a, T_a точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной BC. Точки H_c, L_c, K_c, T_c определяются аналогично. Докажите, что **(a)** $(H_a, L_a, K_a, T_a) = -1$; **(b)** $(B, H_a, T_a, K_a) = (B, H_c, T_c, K_c)$; **(c)** Прямые $H_aH_c, L_aL_c, K_aK_c, T_aT_c$ пересекаются в одной точке или параллельны.

6. Вписанная окружность треугольника треугольника ABC касается его сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке G. Докажите, что точка G лежит на отрезке, соединяющем середину отрезка A_1C_1 с серединой высоты треугольника $A_1B_1C_1$ из вершины B_1.

7. На плоскости даны две точки A, B и чернильное пятно, пересекающее прямую AB. Одной линейкой постройте продолжение прямой AB за пятно,

если в процессе построения запрещается отмечать точки и проводить линии внутри пятна.

На окружности

Рассмотрим четыре прямые a, b, c, d, пересекающиеся в одной точке, и прямую l, пересекающую эти прямые в точках A, B, C, D соответственно. Тогда двойное отношение $(ABCD)$ не зависит от прямой l и называется *двойным отношением* $(abcd)$ *четверки прямых.*

Пусть теперь A, B, C, D — четыре различные точки, лежащие на одной окружности ω, а также точку $O \in \omega$. Тогда двойное отношение (OA, OB, OC, OD) не зависит от выбора точки O (почему?) и называется *двойным отношением* $(ABCD)$ *четверки точек, лежащих на одной окружности.* Случай, когда O совпадает с одной из точек A, B, C, D, тоже имеет смысл — тогда соответствующая хорда окружности просто заменяется на касательную.

Определения гармоничности для четверки прямых и четверки точек, лежащих на одной окружности, такое же, как и для четверки точек, лежащих на одной прямой. Для гармонической четверки точек на окружности употребляется также выражение *гармонический четырехугольник.*

8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω, точка M — середина AC. Докажите, что следующие условия эквивалентны 1) четырехугольник $ABCD$ гармонический; 2) касательные к ω в точках A, C пересекаются на прямой BD; 3) $AB \cdot CD = BC \cdot AD$; 4) $\angle ABD = \angle MBC$; 5) $\angle AMB = \angle AMD$.

9. Касательные в точках B и C к описанной окружности прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Докажите, что прямая AP делит пополам высоту BH треугольника ABC.

10. Вписанная окружность ω касается сторон AB, BC, AC равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Отрезки AA_1 и CC_1 вторично пересекают окружность ω в точках A_2 и C_2 соответственно. Прямая A_2C_2 пересекает отрезки BC, AB, B_1C_1, A_1B_1 в точках A_3, C_3, A_4, C_4 соответственно. Докажите, что отрезок A_3C_3 делится точками A_2, A_4, C_2, C_4 на пять равных частей.

Комплексные числа: алгебра

Определение. *Комплексным числом* называется выражение вида $z = a + bi$, где a, $b \in \mathbb{R}$, а $i^2 = -1$. Число a называется *вещественной частью* и обозначается через $\mathrm{Re}(z)$, и число b — *мнимой частью* и обозначается через $\mathrm{Im}(z)$.

Геометрически комплексное число z — это точка на плоскости (или, что то же самое, вектор с началом в начале координат и концом в данной точке). Модуль $|z|$ комплексного числа — это длина соответствующего вектора, а аргумент φ — ориентированный угол между осью абсцисс и соответствущим вектором (считаем, что $-\pi < \varphi \leqslant \pi$). С помощью этих величин комплексное число z можно записать в *тригонометрической форме*: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Вектор, симметричный z относительно оси абсцисс, называется сопряженным с z и обозначается $\bar{z}$.

Мысли. 1. При выполнении операций сложения и вычитания с комплексными числами удобно пользоваться обычной формой записи, а при выполнении операций умножения, деления и возведения в степень — тригонометрической.

2. Модуль комплексного числа очень неудобен для работы. Полезно использовать формулу $|z|^2 = z\bar{z}$.

Упражнения.

1. Вычислите $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.
2. Решите уравнение $x^2 - (2i+2)x + (2i-1) = 0$.
3. Докажите, что при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.
4. Докажите, что $\overline{z_1} \pm \overline{z_2} = \overline{z_1 \pm z_2}$, $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$, $\overline{z_1} : \overline{z_2} = \overline{z_1 : z_2}$.

Задачи.

1. **Формура Муавра.** Докажите, что $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

2. Запишите в явном виде все корни уравнения **(a)** $z^3 + 1 = 0$; **(b)** $z^6 = 1$.

3. Известно, что $|a| = |b| = |c| = 1$. Найти $\left|\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right|$.

Комплексные числа: геометрия

Мысль. Многие полезные преобразования плоскости хорошо записываются в комплексных числах.

4. Какой формулой вида $z' = f(z)$ задается **(a)** параллельный перенос; **(b)** поворот вокруг начала координат; **(c)** поворотная гомотетия?

5. Какой формулой вида $z' = f(z, \bar{z})$ задается **(a)** осевая симметрия относительно мнимой оси; **(b)** инверсия относительно единичной окружности с центром в начале координат?

6. **(a)** Докажите, что точки z_1, z_2 и z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{z_3} - \overline{z_2}}{\overline{z_3} - \overline{z_1}}$ (иначе говоря, простое отношение $\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ вещественно).
(b) Докажите, что уравнение прямой, проходящей через точки $A(a)$ и $B(b)$ на единичной окружности, задается формулой $z + ab\bar{z} = a + b$.
(c) Докажите, что уравнение касательной к единичной окружности в точке a задается формулой $\bar{a}z + a\bar{z} = 2$.

7. **(a)** Даны комплексные точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ и $D(d)$ на единичной окружности. Докажите, что $AC \perp BD$ тогда и только тогда, когда $ac + bd = 0$.

(b) Запишите соответствующий критерий перпендикулярности для четырех произвольных точек $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ и $D(d)$ на плоскости.

8. **(a)** Даны три точки $A(a)$, $B(b)$ и $C(c)$, образующие равносторонний треугольник. Чему может быть равно число $\frac{c-a}{b-a}$?
(b) Даны четыре точки $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ и $D(d)$, не лежащие на одной прямой. Докажите, что они лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда

$$\frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{c}-\bar{b}} : \frac{\bar{a}-\bar{d}}{\bar{d}-\bar{b}}$$

(иначе говоря, когда двойное отношение $[a, b; c, d] := \frac{a-c}{c-b} : \frac{a-d}{d-b}$ вещественно).

Счет в комплексных-1

Полезные формулы, важно помнить или уметь выводить на месте.

- $|AB|^2 = (a-b)(\overline{a}-\overline{b})$
- A, B, C коллинеарны $\Leftrightarrow \frac{a-b}{a-c} \in \mathbb{R}$
- $AB \parallel CD \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-d} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-d} = \overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)}$
- $AB \perp CD \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-d} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-d} = -\overline{\left(\frac{a-b}{c-d}\right)}$
- $\measuredangle A_1B_1C_1 = \measuredangle A_2B_2C_2 \Leftrightarrow \frac{a_1-b_1}{c_1-b_1} : \frac{a_2-b_2}{c_2-b_2} \in \mathbb{R}$
- A, B, C, D коцикличны $\Leftrightarrow \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \in \mathbb{R}$
- M на отрезке AB такова, что $\frac{AM}{MB} = \frac{\lambda}{\mu} \Leftrightarrow m = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot a + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot b$

Формулы для работы с единичной окружностью Ω.

- $Z \in \Omega \Leftrightarrow z\overline{z} = 1$
- $AB \perp CD$ $(A, B, C, D \in \Omega) \Leftrightarrow ab + cd = 0$
- $Z \in AB$ $(A, B \in \Omega) \Leftrightarrow z + ab\overline{z} = a + b$
- ZA касается Ω $(A \in \Omega) \Leftrightarrow z + a^2\overline{z} = 2a$

Сразу разбираем.

- H - ортоцентр ABC $(A, B, C \in \Omega) \Leftrightarrow h = a + b + c$
- $AB||CD$ $(A, B, C, D \in \Omega) \Leftrightarrow ab = cd$
- X - точка пересечения AB и CD $(A, B, C, D \in \Omega) \Leftrightarrow x = \frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$

1. Z - точка пересечения касательных из A и B к $\Omega \Leftrightarrow z = \frac{2ab}{a+b}$

2. K - основание перпендикуляра из Z на $AB \Leftrightarrow k = \frac{a+b+z-ab\overline{z}}{2}$

3. Докажите, что расстояние между проекциями точки окружности на два ее фиксированных диаметра не зависит от положения точки на окружности.

4. **Теорема Ньютона.** Докажите, что центр вписанной в четырехугольник окружности лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей этого четырехугольника

5. **Прямая Штейнера.** Точка D лежит на описанной окружности треугольника ABC, а H - его ортоцентр. Докажите, что отражения D относительно сторон треугольника и H лежат на одной прямой.

6. Докажите, что середины трех отрезков, соединяющих проекции произвольной точки плоскости на пары противоположных сторон или диагоналей вписанного четырехугольника лежат на одной прямой.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A, B, C равны. Докажите, что прямая Эйлера треугольника ABC проходит через D.

8. B' и C' - отражения вершин B и C относительно сторон AC и AB треугольника ABC. O' - отражение центра его описанной окуржности O относительно BC. Докажите, что AO' проходит через центр описанной окружности треугольника $AB'C'$.

Аддитивная комбинаторика

1. **(a)** Докажите, что из n чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на n.

(b) Как устроены контрпримеры, когда чисел $n-1$?

(c) Дано множество из n целых чисел. Пусть A_k — количество упорядоченных наборов размера k, сумма в которых делится на n. Докажите, что $\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)!A_k \geqslant n!$.

2. **(a)** Дано k чисел, взаимно простых с $n \geqslant k$. Докажите, что среди всевозможных сумм подмножеств этих чисел хотя бы k различных остатков по модулю n.

(b) Дано $2k-1$ число, среди которых нет $k+1$ сравнимых по модулю простого p. Докажите, что среди всевозможных сумм по k чисел не менее k различных остатков.

(c*) *Теорема Эрдеша-Гинзбурга-Зива.* Докажите, что среди $2n-1$ числа можно выбрать n, сумма которых делится на n.

3. Пусть A есть 101-элементное подмножество множества $S = \{1, 2, ..., 10^6\}$. Докажите, что для некоторых натуральных $t_1, ..., t_{100} \in S$ следующие множества $A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, j = 1, ..., 100$, попарно не пересекаются.

4. В первом ряду зрительного зала 330 мест, все расстояния между соседними креслами одинаковы. В этом ряду сидят 25 зрителей. Докажите, что среди попарных расстояний между этими зрителями найдутся два равные.

5. *Теорема Коши-Дэвенпорта.* Дано два множества A и B остатков по простому модулю p. Докажите, что множество $A + B$ содержит не менее, чем $\min(p, |A| + |B| - 1)$ элементов.

Рассмотрите объединение и пересечение двух приведённых множеств.

6. Даны натуральные $k \geqslant n$. Есть k целых чисел $a_1, a_2, ...a_k$. Докажите, что количество подмножеств из них, сумма чисел в которых делится на n, не менее 2^{k-n+1}.

7. Докажите, что для любого простого числа $p > 100$ можно выбрать 5 натуральных чисел, не кратных p, сумма четвертых степеней которых будет делиться на p.

8. Натуральные числа $a_1, a_2, ..., a_n$ дают 20 различных остатков от деления на $n+10$. Докажите, что сумма нескольких из этих чисел делится на $n+10$.

Счет в отрезках-1

Полезные формулы, важно помнить или уметь выводить на месте.

Синус суммы. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$, например $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

Косинус суммы. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$, например $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$

Теорема синусов. $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$

Теорема косинусов. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

Формула Стюарта. $AD^2\cdot BC=AB^2\cdot CD+AC^2\cdot BD-BC\cdot CD\cdot BD$

Формулы Карно. $d_a+d_b+d_c=R+r$ и $r_a+r_b+r_c=4R+r$

Формула Эйлера. $OI^2=R^2-2Rr$

Площадь треугольника. $S=pr=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ah_a=\frac{abc}{4R}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Длина медианы и биссектрисы. $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$ и $l_a=\sqrt{bc-b_1c_1}=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$

Сразу разбираем. O и H - центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Точка M - середина AB, D - основание высоты из вершины A, X - середина CH. Точка K - центр описанной окружности тругольника AMD. Докажите, что $KX=KO$.

1. AA_1, BB_1 - биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Точка M - середина A_1B_1, I - инцентр треугольника. Докажите, что MI перпендикулярно AB.

2. На внешней биссектрисе угла B треугольника ABC отмечена точка D внутри угла BAC такая, что $\angle BCD=60^\circ$. Известно, что $CD=2AB$. Точка M - середина BD. Докажите, что треугольник AMC равнобедренный.

3. **Теорема Наполеона.** На сторонах треугольника ABC наружу построены равносторонние треугольники. Докажите, что их центры образуют правильный треугольник.

4. ω_a и ω_b - вневписанные окружности треугольника ABC, касающиеся отрезков BC и AC соответственно. ω_a касается сторон BC и AB в точках C_A и B_A соответственно, а ω_b касается сторон AC и AB в точках C_B и A_B соответственно. Докажите, что прямые C_AB_A и C_BA_B пересекаются на высоте треугольника ABC, опущенной из вершины C.

5. На дуге CD описанной вокруг квадрата $ABCD$ окружности выбрана точка P. Прямые PA, PB пересекают диагонали BD, AC соответственно в точках K, L. Точки M, N - проекции K, L соответствввенно на CD, а Q - точка пересечения KN и ML. Докажите, что PQ делит AB пополам.

(a) Докажите, что треугольник NPM прямоугольный и убедитесь, что чертеж однозначно по нему восстанавливается.

(b) Пусть $MN=1, PN=a, PM=b, a^2+b^2=1$. Найдите координату проекции Q на MN и расстояние от Q до MN.

(c) Найдите координаты точек пересечения прямых PA и PB с MN.

(d) Найдите координату пересечения PQ с MN и завершите решение задачи.

6. Вписанная и вневписанная окружности треугольника ABC касаются стороны BC в точках M и N. Известно, что $\angle BAC=2\angle MAN$. Докажите, что $BC=2MN$.

(a) Напишите теорему косинусов для треугольника AMN и и докажите, что $AM\cdot AN=\frac{(b+c)^2-a^2}{4\cos\frac{\alpha}{2}}$

(b) Посчитайте площадь треугольника AMN двумя способами и используя полученное в предыдущем пункте равенство докажите, что $\frac{MN}{BC}=\frac{(b+c)^2-a^2}{8\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot bc}$

(c) При помощи теоремы косинусов для треугольника ABC преобразуйте знаменатель правой части и докажите утверждение задачи.

Как посчитать AM и AN?

7. I - центр вписанной окружности треугольника ABC. Касательная к его описанной окружности в точке B, касательная к окружности ω, описанной вокруг треугольника AIC, в точке I и прямая AC образуют треугольник. Докажите, что его описанная окружность касается ω.

Каким набором точек удобно задать чертеж?

Серия 1. Разминочная

1. Внешние биссектрисы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I_A. Прямая ℓ, проходящая через I_A пересекает прямые AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что прямые, симметричные прямым BY и CX относительно BB_1 и CC_1 пересекаются на B_1C_1.

2. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны. Докажите, что перпендикуляры, опущенные из середин сторон AB и BC на противоположные стороны четырехугольника, пересекаются на прямой BD.

3. Дан треугольник ABC и точки B_1, C_1 на сторонах AC, AB такие, что прямые BB_1, CC_1 пересекаются на высоте треугольника AA_1. Докажите, что прямые A_1B_1 и A_1C_1 симметричны относительно AA_1.

4. На чевианах AA_1, BB_1, CC_1 (то есть, пересекающихся в одной точке) треугольника ABC выбраны точки A_2, B_2 и C_2 соответственно. Положим $A_3 = BC_2 \cap B_2C$. Точки B_3 и C_3 определяются аналогично. Докажите, что прямые AA_3, BB_3 и CC_3 пересекаются в одной точке.

5. Дан ромб $ABCD$ с острым углом B. Точка O — центр описанной окружности треугольника ABC. На продолжении луча OC за точку C выбрана точа P. Прямая PD пересекается с прямой, проходящей через точку O параллельно стороне AB, в точке Q. Докажите, что $\angle AQO = \angle PBC$.

6. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, Γ — окружность, описанная около этого треугольника. Прямая AI пересекает окружность Γ в точках A и D. Точка E выбрана на дуге BDC, а точка F на стороне BC так, что $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. Точка G — середина отрезка IF. Докажите, что прямые DG и EI пересекаются в точке, лежащей на окружности Γ.

7. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I, на прямых AI и CI выбраны точки P и Q соответственно так, что угол $\angle PBQ = \frac{1}{2}\angle ABC$. Докажите, что угол $\angle PCQ = \frac{1}{2}\angle ADC$

8. Обозначим M и N середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно. Точка X такова, точка на касательной к окружности (ABC) в точке A. Окружность ω_B касается прямой XM в точке M и проходит через вершину B, окружность ω_C определяется аналогично. Докажите, что одна из точек пересечения ω_B и ω_C лежит на прямой BC.

9. Обозначим за S проекцию ортоцентра треугольника ABC на его медиану AM. Окружность ω проходит через точки A и S и пересекает отрезки AB и AC в точках Q и P соответственно. Докажите, что отрезки BP и CQ пересекаются на ω.

10. Остроугольный треугольник ABC с ортоцентром H вписан в окружность Ω. Прямая ℓ, проходящая через H, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Окружность ω, проходящая через точки M, N и A, вторично пересекает Ω в точке P. Прямая PH вторично пересекает ω в точке Q. Докажите, что $MN \perp AQ$

Счет в комплексных-2

Сразу разбираем. Из основания A_1 биссектрисы AA_1 неравнобедренного треугольника ABC провели вторую касательную ко вписанной окружности, точку касания обозначили K_A. Аналогично строятся точки K_B, K_C . Докажите, что прямые, соединяющие K_A, K_B, K_C с серединами соответствующих сторон треугольника, пересекаются в точке, лежащей на вписанной в треугольник окружности.

1. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром O. Прямая AO вторично пересекает ω в точке A_1. Касательная к ω в точке A_1 пересекает BC в точке X. Прямая XO пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что O — середина PQ.

2. H и M - ортоцентр и центроид остроугольного треугольника ABC соответственно. Луч BM пересекает окружность ABC в точке D. Точка E симметрична D относительно AC. Оказалось, что $MH = ME$. Найдите угол ABC.

3. Диагонали вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке R, а лучи DA и CB — в точке P. Точки G и H — отражения точки R относительно середины отрезка CD и относительно прямой AD соответственно. Докажите, что точки P, H, D, G лежат на одной окружности.

4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. A_2 и B_2 — отражения точек A_1 и B_1 относительно точек B и A соответственно. C_0 — середина отрезка, соединяющего C_1 и основание перпендикуляра из C_1 на A_1B_1, а M — середина A_1B_1. Докажите, что прямые A_2B_2 и MC_0 перпендикулярны.

5. H_A, H_B, H_C и K_A, K_B, K_C — основания высот и точки касания вписанной окружности ω треугольника ABC. Докажите, что треугольник, образованный отражениями сторон треугольника $H_AH_BH_C$ относительно сторон треугольника $K_AK_BK_C$, вписан в ω. *Указание: найдите направления сторон искомого треугольника, угадайте координаты его вершин и решите задачу обратным ходом.*

6. На сторонах треугольника ABC вне него построены треугольники ABP и ACQ так, что $AP = AB$, $AC = AQ$ и $\angle BAP = \angle QAC$. Отрезки PC и QB пересекаются в точке R. Точка O — центр окружности BRC. Докажите, что $AO \perp PQ$. *Указание: чтобы найти точку O, необязательно считать точку R.*

7. Средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне BC, пересекает его описанную окружность ω в точках P и Q. Касательная к ω в точке A пересекает BC в точке T. Докажите, что $\angle ATP = \angle CTQ$. *Для проверки равенства углов достаточно найти pq и $p+q$. Например, сначала можно найти $\frac{p+q}{2}$, а затем из $\frac{2pq}{p+q}$ выразить pq.*

Практические рекомендации.

- Выработайте план решения. Разберитесь, что и в каком порядке Вы будете делать. И прежде чем приступать к реализации плана, потратьте не менее 5-10 минут на его оптимизацию: попробуйте переопределить точки поудобнее или заменить условия на равносильные, но алгебраически более простые.
- Вводите симметричные и однородные обозначения. В финале решения получатся симметричные однородные многочлены, и их легко будет разложить.
- Считайте аккуратно. Не делайте два алгебраических преобразования одновременно. К примеру, если надо раскрыть скобки и привести подобные, то сначала раскройте скобки, и только потом приведите подобные. Не экономьте бумагу; не пишите на клочках, полях и в случайных местах страницы.
- В финальном тождестве **никогда** не раскрывайте скобки; наоборот, раскладывайте многочлены на множители.
- Часто какая-то точка или какое-то условие симметрично зависит от двух стартовых параметров b и c. Попробуйте подставить в координату точки или в уравнение условия $b = c$ или $b = -c$. Если выражение занулилось, то оно делится соответственно на $(b-c)$ или $(b+c)$.
- Если надо преобразовать выражение и преобразовать сопряжённое выражение, то достаточно преобразовать одно из них, а потом навесить сопряжение. В частности, при проверке коллинеарности точек X, Y, Z можно до упора упрощать $\frac{x-y}{x-z}$, и только потом находить к нему сопряжённое.
- Иногда сопряжённые точки выражаются простыми формулами, а сами точки — нет. Вместо того, чтобы находить сами точки, можно переписать доказываемое в терминах сопряжённых точек. Примеры: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff \overline{b} - \overline{a} = \overline{d} - \overline{c}$; X, Y, Z коллинеарны $\iff \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\overline{x}-\overline{z}} \in \mathbb{R}$; $\measuredangle PQR = \measuredangle XYZ \iff \frac{\overline{p}-\overline{q}}{\overline{r}-\overline{q}} \cdot \frac{x-y}{z-y} \in \mathbb{R}$
- Координаты точек на единичной окружности легко восстанавливаются по мерам дуг, так как аргументом комплексного числа $\frac{x}{y}$ служит длина ориентированной дуги $\overset{\frown}{\mathrm{XY}}$ (где X, Y на единичной окружности). Пример: если AD и BC — перпендикулярные хорды единичной окружности, то $\overset{\frown}{\mathrm{AB}} + \overset{\frown}{\mathrm{DC}} = \pm 180°$, откуда $\left(\frac{b}{a}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = -1$ и $d = -\frac{bc}{a}$.
- Полезно вводить дополнительные точки на единичной окружности (например, второй раз пересекать прямые из условия с окружностью), так как они позволяют писать простые уравнения прямых; сами точки часто могут быть найдены исходя из мер дуг.
- Коллинеарность трёх точек X, Y, Z может быть записана тремя способами: $\frac{y-x}{z-x} \in \mathbb{R}$, $\frac{x-y}{z-y} \in \mathbb{R}$, $\frac{x-z}{y-z} \in \mathbb{R}$. Выбирайте из них самый удобный.
- То же самое касается и условия коциклличности точек. Условие коциклличности точек — это по сути равенство двух углов. Во-первых, можно выбрать, какую пару углов сравнивать. Во-вторых, один из углов может выражаться через меры дуг единичной окружности, что невероятно упрощает формулы.

Мюрхед и полиномиальные неравенства

Определение. Зафиксируем переменные x_1, x_2, x_3. *Симметрические многочлены* («тэшки») $T_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_\sigma x_{\sigma(1)}^\alpha x_{\sigma(2)}^\beta x_{\sigma(3)}^\gamma$, где суммирование берется по всевозможным перестановкам σ трех переменных, а числа $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$ — целые неотрицательные. Например,

$$T_{3,0,0} = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3), \quad T_{2,1,0} = x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_1^2, \quad T_{1,1,1} = 6x_1x_2x_3.$$

Неравенство Мюрхеда. Говорят, что набор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *мажорирует* набор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, если выполнены следующие условия:

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2, \quad \alpha_1 + \beta_1 \geqslant \alpha_2 + \beta_2, \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2.$$

Если набор $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ мажорирует набор $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, то для неотрицательных значений переменных справедливо неравенство $T_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1} \geqslant T_{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}$.

Мысль. При выполнении арифметических операций с симметрическими многочленами достаточно проследить за судьбой одного слагаемого из каждой тэшки, потому что у остальных слагаемых судьба аналогична...

Пример 1. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \geqslant \frac{3}{2}$.

Решение. Положим $s = a+b+c$. Тогда домножим на знаменатель и получим следующее: $\sum_{\text{cyc}} a(s-b)(s-c) \geqslant \frac{3}{2}(s-a)(s-b)(s-c)$. Левая часть равна

$$s^2 \sum_{\text{cyc}} a - s \sum_{\text{sym}} ab + 3abc = \Big(\sum_{\text{cyc}} a\Big)^3 - \Big(\sum_{\text{cyc}} a\Big)\Big(\sum_{\text{sym}} ab\Big) + 3abc =$$
$$= \Big(\sum_{\text{cyc}} a^3 + 3\sum_{\text{sym}} a^2b + 6abc\Big) - \Big(2\sum_{\text{sym}} a^2b + 6abc\Big) + 3abc = \frac{1}{2}T_{3,0,0} + 2T_{2,1,0} + \frac{1}{2}T_{1,1,1}.$$

Правая часть равна $(s-a)(s-b)(s-c) = s^3 - s^2\sum_{\text{cyc}} a + s\sum_{\text{cyc}} ab - abc = \big(\sum_{\text{cyc}} a\big)\big(\sum_{\text{cyc}} ab\big) - abc = \sum_{\text{sym}} a^2b + 2abc = T_{2,1,0} + \frac{1}{3}T_{1,1,1}$.

В итоге получаем следующее: $\frac{1}{2}T_{3,0,0} + 3T_{2,1,0} + \frac{1}{2}T_{1,1,1} \geqslant \frac{3}{2}T_{2,1,0} + \frac{1}{2}T_{1,1,1}$, откуда $T_{3,0,0} \geqslant T_{2,1,0}$ — неравенство Мюрхеда.

Конструкция полной производной. Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — многочлен от переменных x_1, x_2, ..., x_n. Наша цель — доказать неравенство $P(x_1, x_2, \dots, x_n) \geqslant 0$ при x_1, x_2, ..., $x_n \geqslant 0$. Зафиксируем произвольную точку $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ и рассмотрим сдвиг этой точки на одну и ту же величину t: $x_1 = x_1^0 + t$, $x_2 = x_2^0 + t$,...$x_n = x_n^0 + t$. Таким образом, многочлен P превращается в многочлен от одной переменной t.

Определение. Производная многочлена P по переменной t называется *полной производной* и обозначается через ΔP. Например, $\Delta(x_1) = 1$, $\Delta(x_1x_2) = x_1 + x_2$,

$$\Delta(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1) = 2(x_1 + x_2 + x_3) - \big((x_1 + x_2) + (x_2 + x_3) + (x_3 + x_1)\big) = 0.$$

В общем случае $\Delta P = P_{x_1} + P_{x_2} + \dots + P_{x_n}$, где P_{x_i} — частная производная по переменной x_i.

Если производная многочлена P как функции от t неотрицательна, то при сдвиге всех переменных на t многочлен P убывает. Значит, достаточно проверить неравенство $P \geqslant 0$ для $x_n = 0$.

Пример 2. Для любых неотрицательных x, y, z докажите неравенство

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz + 4(x-y)(y-z)(z-x).$$

Перенесем все слагаемые в левую часть и обозначим ее через $P(x, y, z)$. Тогда полная производная равна $\Delta P = 3(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \geqslant 0$, поэтому достаточно проверить неравенство для $z = 0$. Оно превращается в неравенство $x^3 + y^3 \geqslant -4xy(x-y)$, которое переписывается в виде $x^3 + y(2x-y)^2 \geqslant 0$ — очевидно.

1. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство $(x+y)(y+z)(z+x) + xyz \leqslant 3(x^3 + y^3 + z^3)$.
2. Докажите, что $\Delta T_{\alpha,\beta,\gamma} = \alpha T_{\alpha-1,\beta,\gamma} + \beta T_{\alpha,\beta-1,\gamma} + \gamma T_{\alpha,\beta,\gamma-1}$.
3. **Неравенство Шура. (a)** Докажите, что $T_{3,0,0} + T_{1,1,1} \geqslant 2T_{2,1,0}$.
   (b) Докажите, что для любого $n \geqslant 3$ $T_{n,0,0} + T_{n-2,1,1} \geqslant 2T_{n-1,1,0}$.
4. Для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x+y+z = 1$, докажите неравенства:
   (a) $1 + 9xyz \geqslant 4(xy + yz + zx)$.
   (b) $0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant 7/27$.
5. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство $\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{2a+b+c} \leqslant \frac{3}{4}$.
6. Про вещественные числа x, y, z известно, что $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 0$. Докажите неравенство $\sum_{\text{cyc}} x^3y^2 \geqslant xyz\sum_{\text{cyc}} x^2$.
7. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство
$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$
8. Для неотрицательных чисел x, y, z докажите неравенство $x^2y + y^2z + z^2x \leqslant \frac{4}{27}(x + y + z)^3$.
9. Для неотрицательных чисел x, y, z, t докажите неравенство $2T_{4,0,0,0} + T_{1,1,1,1} \geqslant 3T_{2,2,0,0}$.
10. Для неотрицательных чисел a, b, c имеет место равенство $a + b + c = ab + bc + ca$. Докажите, что $a + b + c + 1 \geqslant 4abc$.

Счет в отрезках-2

Полезные формулы, важно помнить или уметь выводить на месте.

Теорема синусов. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Теорема косинусов. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

Формула Стюарта. $AD^2 \cdot BC = AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD - BC \cdot CD \cdot BD$

Формулы Карно. $d_a + d_b + d_c = R + r$ и $r_a + r_b + r_c = 4R + r$

Формула Эйлера. $OI^2 = R^2 - 2Rr$ и $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$

Площадь треугольника. $S = pr = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ah_a = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Длина медианы и биссектрисы. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ и $l_a = \sqrt{bc - b_1c_1} = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$

Теорема Карно. Перпендикуляры из X, Y, Z на BC, CA, AB пересекаются в одной точке $\iff BX^2 - CX^2 + CY^2 - AY^2 + AZ^2 - BZ^2 = 0$.

Критерий коллинеарности трех точек. C лежит на отрезке $AB \iff \frac{XA}{\sin\angle BXC} + \frac{XB}{\sin\angle AXC} = \frac{XC}{\sin\angle AXB}$

Сразу разбираем. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L, M, а внутри треугольника - точка P так, что $PL||BC, PM||CA$ и $PK||AB$. Может ли оказаться, что все три трапеции $AMPL, BKPM, CLPK$ описанные?

1. **Полезная лемма.** На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно. Отрезки BE и CD пересекаются в точке F. Докажите, что если $BC^2 = BD \cdot BA + CE \cdot CA$, то четырехугольник $ADFE$ вписанный.
2. Вершина F параллелограмма $ACEF$ лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Известно, что $AC = AD$ и $AE = 2CD$. Докажите, что $\angle CDE = \angle BEF$. *Указание: задайте чертеж через треугольник ABC и докажите равенство косинусов углов из условия.*
3. В треугольник ABC вписана окружность с центром в точке I. Прямая, параллельная AI пересекает AB и AC в точках X и Y, а окружность — в точках Z и T. Докажите, что окружности AXY и IZT касаются.
4. Чевианы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P, лежащей внутри треугольника. Известно, что $PA_1 = PB_1 = PC_1$. Докажите, что перпендикуляры, восстановленные в точках A_1, B_1, C_1 к сторонам треугольника ABC, пересекаются в одной точке. *Указание: возьмите треугольник $A_1B_1C_1$ за стартовый, восстановите A, B, C при помощи критерия коллинеарности трех точек и воспользуйтесь теоремой Карно.*
5. AA_1 и BB_1 — биссектрисы треугольника ABC. Прямая A_1B_1 пересекает его описанную окружность ω в точках P, Q. Докажите, что касательные к ω, проведенные в точках P и Q, касаются вневписанной окружности треугольника ABC, лежащей напротив вершины C. *После формулы Эйлера и одного нетривиального геометрического наблюдения задача несложно считается.*
6. A_0, C_0 — отражения вершины B треугольника ABC относительно внешних биссектрис углов A и C соответственно. Точки A_1 и C_1 получаются из A и C отражением относительно середин отрезков CA_0 и AC_0 соответственно. O_a и O_c — центры описанных окружностей треугольников BA_0A_1 и BC_0C_1 соответственно. Докажите, что прямые CO_a и AO_c пересекаются на окружности ACI_b, где I_b — центр вневписанной окружности треугольника ABC, лежащей напротив вершины B. *А вот здесь пригодится первая задача.*
7. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно, что $AB = BC = CD = DE = 1$. Докажите, что $AD < 2$. *Если хотите поупражняться в тригонометрии, эта задача для вас. Иначе решать ее не стоит.*
8. Описанный четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в O. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников OAB, OBC, OCD, ODA лежат на одной окружности.
   (a) Пусть X — точка пересечения I_aI_c и I_bI_d. При помощи масс докажите, что X делит I_aI_c в отношении $(2R + c) : (2R + a)$.
   (b) Из теоремы косинусов для треугольника M_aOM_c выразите $\cos\angle M_aOM_c$, подставьте его в теорему косинусов для треугольника I_aOI_c и докажите, что $XI_a \cdot XI_c = XI_b \cdot XI_d$.
9. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. G — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Точки A_2 и C_2 получаются из G отражением относительно середин отрезков AA_1 и CC_1 соответственно. Докажите, что $AC_2 = CA_2$. *Здесь надо честно 4 раза написать формулу Стюарта.*
10. Точка K лежит на вписанной окружности треугольника ABC. Обозначим за t_a, t_b, t_c длины отрезков касательных, проведенных из K к вневписанным окружностям треугольника ABC. Оказалось, что квадрат одного из чисел t_a, t_b, t_c равен сумме квадратов двух других. Докажите, что K лежит на одной из средних линий треугольника ABC.
    (a) В формуле степени точки замените KI_a^2 на $(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{II_a})^2$ и после подстановки выразите $\overrightarrow{KI} \cdot (\overrightarrow{II_c} + \overrightarrow{II_b} - \overrightarrow{II_a})$ через элементы треугольника.
    (b) Убедитесь, что вектор $\overrightarrow{II_c} + \overrightarrow{II_b} - \overrightarrow{II_a}$ перпендикулярен BC и докажите, что длина проекции KI на него равна $\frac{h_a}{2} - r$, тем самым завершив решение задачи.
11. I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Точки K, L выбраны на отрезке BC таким образом, что вписанные окружности треугольников ABK и ABL касаются в точке P, а вписанные окружности треугольников ACK и ACL касаются в точке Q. Докажите, что $IP = IQ$.
    (a) Пусть N — точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC, K_B, K_C — центры вписанных окружностей треугольников ABK, ACK, L_B, L_C — центры вписанных окружностей треугольников ABL, ACL. Докажите, что $\angle K_BNK_c = \angle L_BNL_c = 90°$.
    (b) Пусть $BC = 1, \angle B = 2\beta, \angle C = 2\gamma$. Пусть $BK_B = b, CL_C = c$. При помощи условия про касание окружностей найдите BL_B и CK_C.
    (c) Запишите алгебраически равенства $\angle K_BNK_c = 90°$ и $\angle L_BNL_c = 90°$ и приравнивая их друг к другу завершите решение задачи.

Производящие функции

Многочлены доказывают тождества

1. Пользуясь биномом Ньютона $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k$, вычислите суммы

(a) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$; **(b)** $C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n$;

(c) $C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2\cdot[n/2]}$; **(d)** $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$;

(e*) $C_n^0 + C_n^4 + \ldots + C_n^{4\cdot[n/4]}$.

2. Докажите тождества

(a) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

(b) $C_n^0 C_m^s + C_n^1 C_m^{s-1} + \ldots + C_n^n C_m^{s-n} = C_{n+m}^s$;

(c) $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \ldots + n(C_n^n)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}$.

Многочлены считают количество разбиений

3. **(a)** Докажите алгебраически тождество

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n}) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{2^{n+1}-1}.$$

(b) Выведите отсюда, что любое натуральное число представляется как сумма степеней двойки, причем единственным образом.

(c) Обобщите это рассуждение так, чтобы доказать существование и единственность представления числа в системе счисления с основанием p.

4. *Обобщенная игральная кость* имеет несколько (больше одной) граней, на которых написаны произвольные натуральные числа (не обязательно различные). Существует ли такая пара (возможно, различных) обобщенных игральных костей, отличная от пары обычных игральных костей, что при ее однократном броске будут возможны в точности те же суммы и в тех же количествах, что и при однократном броске пары обычных игральных костей?

Формальные степенные ряды

Однако не во всех комбинаторных задачах можно обойтись многочленами. Более мощный метод дают *формальные степенные ряды.*

Нестрого, формальной степенной ряд — это «бесконечный многочлен» $\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$. Такие «бесконечные многочлены» можно складывать и умножать как обычные многочлены — раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые.

Строго, *формальный степенной ряд* — это бесконечная числовая последовательность $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ с правилами сложения

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$$

и умножения

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \cdot (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \ldots).$$

Запись $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$ является просто более удобным обозначением для формального степенного ряда $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$. Также говорят, что $A(x)$ является *производящей функцией* последовательности $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$.

Обратным рядом к ряду $A(x)$ называется такой ряд $B(x)$, что $A(x)B(x) = 1$. Обозначение: $B(x) = \frac{1}{A(x)}$.

Обратный ряд может оказаться многочленом, даже если исходный ряд многочленом не является, поэтому с ним бывает удобнее работать.

5. Найдите обратный ряд к ряду

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots$; **(b)** $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$;

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$.

6. Теорема. Обратный ряд для ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ существует тогда и только тогда, когда $a_0 \neq 0$.

Напомним, что *числа Фибоначчи* F_k определяются реккурентно следующим образом:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ при } n \geqslant 2.$$

Пусть $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ — производящая функция чисел Фибоначчи.

7. Цель этой задачи — получить *явную* формулу для чисел Фибоначчи.

(a) Докажите, что $F(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x) = 1 + xF(x) + x^2 F(x),$$

так что $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

(b) Найдите числа A, B, C, D такие, что $\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-B} + \frac{C}{x-D}$.

(c) Выпишите явную формулу для чисел Фибоначчи.

Информация и кодирование

1. Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?

2. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$; **(c)** $k = 13$?

3. Есть $2n$ болельщиков: ровно n из них болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

4. $4n - 1$ школьник расселись по кругу за стол, после чего каждому был надет колпак одного из двух цветов, причем школьники знают, что колпаков одного из цветов на один больше чем другого(но заранее не было оглашено, какой из цветов преобладает). Каждый школьник видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все школьники должны одновременно огласить цвет своего колпака. Смогут ли школьники заранее договориться так, чтобы не менее чем $3n - 1$ из них дали правильные ответы?

5. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ ”да” надо заплатить 1 рубль, за ответ ”нет” — 2 рубля. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

6. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это натуральное число от 1 до 1700. Двое шпионов узнали по одному коду каждый и решили обменяться информацией. Согласовав заранее свои действиия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду несколько (хотя бы один) камней, потом — второй, потом опять первый и т.д. до тех пор, пока камни не кончились. После этого шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация? (Шпионы не сказали друг другу ни слова.)

7. Фокусник намеревается исполнить следующий трюк. Он объявляет натуральное число n и $2n$ вещественных чисел $x_1 < x_2 < ... < x_{2n}$ аудитории. Затем человек из зала выбирает многочлен $P(x)$ степени n с вещественными коэффициентами, вычисляет $P(x_1), ..., P(x_{2n})$, и выписывает их на доску в неубывающем порядке. После этого фокусник называет загаданный многочлен. Может ли фокусник произвести такой трюк?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Седов Г. К.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-1 *18.07.2022*

Информация и кодирование

1. Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10). Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?

2. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$; **(c)** $k = 13$?

3. Есть $2n$ болельщиков: ровно n из них болеют за «Спартак», а остальные — за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «да» или «нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое минимальное количество вопросов это наверняка можно сделать?

4. $4n - 1$ школьник расселись по кругу за стол, после чего каждому был надет колпак одного из двух цветов, причем школьники знают, что колпаков одного из цветов на один больше чем другого(но заранее не было оглашено, какой из цветов преобладает). Каждый школьник видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все школьники должны одновременно огласить цвет своего колпака. Смогут ли школьники заранее договориться так, чтобы не менее чем $3n - 1$ из них дали правильные ответы?

5. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ ”да” надо заплатить 1 рубль, за ответ ”нет” — 2 рубля. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

6. Секретный код к любому из сейфов ФБР — это натуральное число от 1 до 1700. Двое шпионов узнали по одному коду каждый и решили обменяться информацией. Согласовав заранее свои действиия, они встретились на берегу реки возле кучи из 26 камней. Сначала первый шпион кинул в воду несколько (хотя бы один) камней, потом — второй, потом опять первый и т.д. до тех пор, пока камни не кончились. После этого шпионы разошлись. Каким образом могла быть передана информация? (Шпионы не сказали друг другу ни слова.)

7. Фокусник намеревается исполнить следующий трюк. Он объявляет натуральное число n и $2n$ вещественных чисел $x_1 < x_2 < ... < x_{2n}$ аудитории. Затем человек из зала выбирает многочлен $P(x)$ степени n с вещественными коэффициентами, вычисляет $P(x_1), ..., P(x_{2n})$, и выписывает их на доску в неубывающем порядке. После этого фокусник называет загаданный многочлен. Может ли фокусник произвести такой трюк?

Полярное соответствие

Теория

Пусть на плоскости зафиксирована окружность ω с центром O. Рассмотрим пару точек A и A', инверсных относительно ω. *Полярой* точки A относительно окружности ω называется прямая a, проходящая через A' перпендикулярно прямой OA. Точка A в этой ситуации называется *полюсом* прямой a.

Соглашение. В этом листочке полюс и поляра обозначаются одинаковыми буквами, но полюс заглавной, а поляра — строчной.

1. Напишите уравнение поляры точки с координатами (x_0, y_0) относительно окружности, задаваемой уравнением $x^2 + y^2 = 1$.

2. **(a) Свойство двойственности.** $A \in b \Leftrightarrow B \in a$.

(b) Прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда точки A, B, C лежат на одной прямой.

3. Касательные в точках P и Q к окружности ω пересекаются в точке A. Докажите, что PQ — поляра точки A.

4. **Очень важное свойство поляры.** Через точку A проведены две прямые. Первая пересекает окружность ω в точках K и L, а вторая — в точках M и N. Докажите, что точка пересечения прямых KM и LN лежит на поляре точки A.

5. Одной линейкой постройте касательную из точки к окружности.

Задачи

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, прямые AD и BC — в точке Q, прямые AC и BD — в точке R. Докажите, что O — ортоцентр треугольника PQR.

7. Точка A лежит на диаметре BC полуокружности ω. Точки X и Y на ω таковы, что $\angle XAB = \angle YAC$. Докажите, что все прямые XY проходят через фиксированную точку, либо параллельны.

8. Четырехугольники $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ вписаны в одну и ту же окружность. Прямые $A_1D_1, A_2D_2, B_1C_1, B_2C_2$ пересекаются в одной точке P, а прямые A_1B_1, A_2B_2, C_1D_1 пересекаются в одной точке Q.

(a) Прямая C_2D_2 проходит через Q.

(b) Точки пересечения диагоналей четырехугольников совпадают.

9. **(a) Теорема Брианшона.** Диагонали описанного шестиугольника пересекаются в одной точке.

(b) Докажите, что у описанного четырехугольника точка пересечения диагоналей совпадает с точкой пересечения диагоналей четырехугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами.

10. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон BC, AC, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Окружность, проходящая через B и C, касается ω в точке A_2. Точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

Добавка по полярам

1. Точка I — центр вписанной окружности ω треугольника ABC. Прямая l касается окружности ω. Точки A_0, B_0, C_0 на прямой l таковы, что $\angle AIA_0 = \angle BIB_0 = \angle CIC_0 = 90°$. Докажите, что прямые AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в одной точке или параллельны.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Обозначим точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB через K, L, M соответственно. Прямая, проходящая через B параллельно MK, пересекает прямые LM и LK в точках R и S соответственно. Докажите, что угол RIS острый.

3. Пусть AL и AK — внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника ABC соответственно, P — точка пересечения касательных к описанной окружности в точках B и C. Перпендикуляр, восстановленный из точки L к BC, пересекает прямую AP в точке Q. Докажите, что Q лежит на средней линии треугольника LKP.

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка X такая, что $\angle AXE = \angle CXF = 90°$. Докажите, что $\angle AXB + \angle CXD = 180°$.

5. Точки I и H — центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника ABC соответственно. Прямая, проходящая через I перпендикулярно AI, пересекает прямую BC в точке L. Докажите, что поляра точки H относительно вписанной окружности треугольника ABC проходит через середину отрезка AL.

uvw-метод решения неравенств

Рассмотрим кубический многочлен $f(x) = x^3 - ux^2 + vx - w$ с корнми (вообще говоря, комплексными) a, b и c. Мы хотим найти условия на u, v, w, при которых корни этого многочлена будут вещественными и неотрицательными. Для этого рассмотрим *дискриминант*

$$D := (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = -4u^3w + u^2v^2 + 18uvw - 4v^3 - 27w^2$$

(последнее равенство следует из теоремы Виета $a+b+c = u$, $ab+bc+ca = v$, $abc = w$, и некоторых вычислений). Заметим, что у кубического многочлена либо все три корня вещественны, и тогда $D \geqslant 0$, или один корень вещественный, а два других — комплексно-сопряженные, и тогда $D < 0$. Поэтому кубический многочлен $f(x)$ имеет три *вещественных* корня тогда и только тогда, когда $D \geqslant 0$.

С другой стороны, ясно, что если $u, v, w \geqslant 0$, то у многочлена f не может быть отрицательных корней. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть даны три числа (u, v, w). Тогда числа a, b, c, определяемые как корни кубического уравнения $f(x) = 0$, будут вещественными и неотрицательными тогда и только тогда, когда $u, v, w \geqslant 0$ и $D = -4u^3w + u^2v^2 + 18uvw - 4v^3 - 27w^2 \geqslant 0$.

Замечание. Если записать условие $D \geqslant 0$ в терминах переменных a, b, c, то мы получим следующее неравенство:

$$|T_{3,0,0} + 2T_{1,1,1} - 3T_{2,1,0}| \leqslant 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^{3/2}.$$

Это неравенство (и аналогичные ему) можно доказать с помощью полной производной, что устанавливает связь между uvw-методом и методом полной производной.

Зафиксируем зачения u и v и посмотрим, какие значения может принимат w. Условие $D \geqslant 0$ является квадратным неравенством относительно w с отрицательным старшим коэффициентом. Поэтому множество решений представляет собой отрезок. Таким образом, $w_{\min} \leqslant w \leqslant w_{\max}$, причем в граничных точках $D = 0$, а значит, два корня (например, a и b) склеиваются: $a = b$. Если $w_{\min} \leqslant 0$, то минимальное значение w равно 0 и один из корней (например, a) равен 0.

Аналогичным образом можно проанализировать множества решений неравенства D относительно переменных u и v (правда, здесь нужно рассматривать кубические уравнения). Соберем информацию об словиях достижения ими минимального или максимального значения в одну таблицу.

	w	v	u (при условии $w > 0$)
min	$c = 0$ или $a = b$	$a = b$	$a = b$
max	$a = b$	$a = b$	$a = b$

Пример. Неотрицательные числа a, b и c таковы, что никакие два из них не равны 0 одновременно. Докажите неравенство $(ab+bc+ca)\Big(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\Big) \geqslant \frac{9}{4}$.

Решение. Перепишем неравенство в переменных u, v, w: $\dfrac{4uvw + v(u^2-v)^2}{(uv-w)^2} \geqslant \dfrac{9}{4}$. Зафиксируем числа u и v и будем двигать w. Заметим, что $w \leqslant uv/9 \leqslant uv$, поэтому минимум левой части достигается при $w = w_{\min}$. Если $c = 0$, то неравенство принимает вид $(a-b)^2(4a^2+7ab+4b^2) \geqslant 0$. Если $a = b$, то неравенство принимает вид $2ac(a-c)^2 \geqslant 0$.

Полезные советы. 1. Фиксируйте те величины, на которые наложено стартовое условие.

2. Проверяйте каждый шаг вычислений подстановкой равных значений переменных.

Несколько полезных формул.

- $a^2+b^2+c^2 = u^2 - 2v$,
- $a^3+b^3+c^3 = u^3 - 3uv + 3w$,
- $a^4+b^4+c^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2 + 4uw$,
- $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 = uv - 3w$,
- $(a+b)(b+c)(c+a) = uv - w$,
- $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 = v^2 - 2uw$.

1. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a+b+c = 1$. Докажите, что $1 + 9abc \geqslant 4(ab+bc+ca)$.

2. Известно, что $a, b, c > 0$ и $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$. Докажите, что $(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 8$.

3. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$. Докажите. что $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \dfrac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant 2$.

4. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a+b+c = 3$. Докажите, что $\dfrac{1}{9-ab} + \dfrac{1}{9-bc} + \dfrac{1}{9-ca} \leqslant \dfrac{3}{8}$.

5. Известно, что $a, b, c \geqslant 0$ и $a+b+c = 3$. Докажите, что $\dfrac{1}{1+2ab} + \dfrac{1}{1+2bc} + \dfrac{1}{1+2ca} \geqslant \dfrac{2}{1+abc}$.

6. **(a)** Пусть P — симметрический многочлен от трех переменных не более чем пятой степени. Докажите, что неравенство $P(a,b,c) \geqslant 0$ справедливо при любых $a, b, c \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда справедливы неравенства $P(a,b,0) \geqslant 0$ и $P(a,a,c) \geqslant 0$ для любых $a, b, c \geqslant 0$.

(b*) (CD-3)-теорема. Пусть P — циклический многочлен от трех переменных не более чем третьей степени. Докажите, что неравенство $P(a,b,c) \geqslant 0$ справедливо при любых $a, b, c \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $P(a,a,a) \geqslant 0$ и $P(a,b,0) \geqslant 0$ для любых $a, b \geqslant 0$.

Теорема Паскаля

Теорема Паскаля. Отметим на окружности шесть точек A_1, ..., A_6. Обозначим через ℓ_i прямые A_iA_{i+1} (здесь $i = 1, ..., 6$). Положим также $P_i = \ell_i \cap \ell_{i+3}$ (здесь $i = 1, 2, 3$ и сложение индексов осуществляется по модулю 6). Тогда точки P_1, P_2, P_3 лежат на одной прямой.

Полезные советы. 1. Часто теорема Паскаля применяется для вырожденных шестиугольников, в которых склеиваются те или иные вершины. Тогда в этих першинах нужно проводить касательные.

2. Чтобы не путаться с порядком точек, удобно рядом с чертежом выписывать по кругу названия вершин в том порядке, в котором к ним применяется теорема Паскаля. При этом обычно сначала выписываются две протиоположные прямые, а между ними подгоняются оставшиеся вершины.

1. Даны треугольник ABC и произвольная точка T. Пусть P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки T на прямые AB и AC соответственно, а R и S — основания перпендикуляров, опущенных из точки A на прямые TC и TB соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых PR и QS лежит на прямой BC.

2. **(a)** Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка P. Прямые AP, BP, CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A', B' и C' соответственно. Докажите, что главные диагонали шестиугольника, образованного пересечением треугольников ABC и $A'B'C'$, пересекаются в одной точке.
(b*) Докажите аналогичное утверждение для двух произвольных треугольников ABC и $A'B'C'$ с общей описанной окружностью.

3. **(a)** Дан треугольник ABC. Обозначим через A', B' и C' точки пересечения касательных к его описанной окружности в вершинах A, B и C с прямыми BC, CA и AB соответственно. Докажите, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.
(b) Дана окружность ω с диаметром XY, В точке Y проедена касательная, на которой отмечены точки A и B так, что Y лежит на отрезке AB. Отрезки AX и BX пересекают окружность ω в точках C и D соответственно. Отрезки BC и AD пересекают окружность ω в точках F и E соответственно. Докажите, что $XE = XF$.

4. Дана полуокружность с диаметром AB. На этом диаметре отмечена произвольная точка P. На полуокружности отмечены точки K, M, L, N (порядок указан от точки A к точке B), такие, что $\angle APK = \angle BPN$ и $\angle APM = \angle BPL$. Докажите, что отрезки KL и MN пересекутся на пермендикуляре, восстановленном к диаметру AB в точке P.

5. Пусть A' — точка, диаметрально противоположная точке A на описанной окружности треугольника ABC с центром O. Касательная к описанной окружности в точке A' пересекает прямую BC в точке X. Прямая OX пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. Докажите, что $OP = OQ$.

6. Вокруг треугольника ABC описана окружность ω с центром в точке O. Точка I — центр его вписанной окружности, а точка N — середина дуги $\smile BAC$. Окружность, построенная на отрезке AI как на диаметре, вторично пересекает окружность ω в точке Q. Касательная к окружности ω в точке A пересекает прямую NQ в точке M. Докажите, что точки M, I и O лежат на одной прямой.

7. В треугольнике ABC отметили центр описанной окружности O. Пусть l — касательная к описанной окружности треугольника BOC, пересекающая стороны AB и AC в точках D и E соответственно ($D, E \neq A$). Точку A отразили относительно прямой ℓ, получив точку A'. Докажите, что описанные окружности треугольников $A'DE$ и ABC касаются друг друга.

8. В треугольнике ABC проведены высоты AH_a и BH_b и биссектрисы AL_a и BL_b. Вписанная окружность касается сторон BC и AC в точках A_1 и B_1. С помощью теоремы Паскаля докажите, что прямые H_aH_b, L_aL_b и A_1B_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

9. В треугольнике ABC отмечены середины A_1, B_1, C_1 сторон BC, CA и AB соответственно. На описанной окружности трегольника ABC отмечена произвольная точка P. Прямые PA_1, PB_1 и PC_1 вторично пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A', B' и C'. Докажите, что площадь треугольника, образованого прямыми AA', BB' и CC', не зависит от точки положения точки P на окружности.

Производящие функции-2

Мы видели, насколько бином Ньютона

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \tag{1}$$

полезен для доказательства различных комбинаторных тождеств. В действительности, для целого n формула (1) была известна задолго до Ньютона. Достижение Ньютона состояло в обобщении этой формулы на случай нецелого n. В этом листке мы докажем бином Ньютона для $n = 1/2$ и покажем, как его можно использовать для получения явной формулы для чисел Каталана.

Будем обозначать свободный член формального степенного ряда $A(x)$ через $A(0)$.

1. **Теорема 1.** Для любого ряда $A(x)$ с $A(0) > 0$ существует единственный ряд $B(x)$ такой, что $B(x)^2 = A(x)$ и $B(0) > 0$.

В условиях теоремы 1 ряд $B(x)$ называется *корнем* из ряда $A(x)$ и обозначается через $\sqrt{A(x)}$.

2. **Теорема 2 (бином Ньютона, частный случай).**

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{1/2}^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} x^k.$$

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется дифференцировать формальные степенные ряды. *Производной* ряда $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ называется ряд $A'(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$.

3. Докажите следующие свойства производной
   - **(a)** $(A+B)'(x) = A'(x) + B'(x), (cA(x))' = cA'(x)$;
   - **(b)** $(AB)'(x) = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$ *(правило Лейбница)*;
   - **(c)** $\left(\frac{A(x)}{B(x)}\right)' = \frac{A'(x)B(x) - A(x)B'(x)}{B(x)^2}$.

4. Докажите *формулу Тейлора*: $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Указание к задаче 2: докажите равенство

$$\sqrt{1+x}^{(n)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{\sqrt{1+x}}{(1+x)^n}$$

индукцией по n и воспользуйтесь формулой Тейлора.

5. Докажите тождество $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{C_{2k-2}^{k-1} C_{2n-2k-2}^{n-k-1}}{k(n-k)} = \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{n}$ при $n \geqslant 2$.

Напомним, что *числа Каталана* определяются реккурентно следующим образом:

$$c_0 = c_1 = 1, \quad c_{n+1} = c_0 c_n + c_1 c_{n-1} + \ldots + c_n c_0.$$

Пусть $C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ — производящая функция чисел Каталана.

6. **(a)** Докажите, что $C(x)$ удовлетворяет соотношению

$$xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$

и выпишите $C(x)$ в замкнутом виде (т.е. без использования знака Σ и многоточия).

(b) Выпишите явную формулу для чисел Каталана.

Ещё о разбиениях

7. Множество натуральных чисел разбито на конечное (но большее 1) количество арифметических прогрессий. Докажите, что найдутся две прогрессии с одинаковой разностью.

8. Зафиксируем целое положительное n. Докажите, что количество наборов $(x_1, \ldots, x_k)$ целых чисел таких, что

$$0 < x_1 < \ldots < x_k \quad \text{и} \quad x_1 + \ldots + x_k = n, \quad k \leqslant n$$

равно количеству наборов $(y_1, \ldots, y_k)$ целых нечетных чисел таких, что

$$1 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_k \quad \text{и} \quad y_1 + \ldots + y_k = n, \quad k \leqslant n.$$

Группа 9-10-2

1. На доске были написаны 5 целых чисел - коэффициенты и корни квадратного трёхчлена в каком-то порядке. После того, как одно из них стерли, на доске остались числа 2, 3, 4, -5. Восстановите исчезнувшее число и докажите, что было написано именно оно.

2. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $ax^2 + bx + c > cx$ при любом x. Докажите, что $cx^2 - bx + a > cx - b$ при любом x.

3. Даны числа $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Известно, что у каждого из десяти квадратных трехчленов $x^2 - a_1x + a_2, ..., x^2 - a_{10}x + a_1$ не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4.

4. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2 + b^2) \geq f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена отрицательный.

5. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

6. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трёхчлена $R(x)$ в многочлен $P(x) + Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x)+R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x) + R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что суммы корней трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ равны между собой.

7. Придумайте для любых трех различных натуральных чисел a, b и c квадратный трехчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3.

8. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, ..., a_n$, что квадратный трехчлен $x^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2x + (a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + 1)$ имеет по крайней мере один целый корень

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Грехова Д.Д.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *??? июля 2022 г.*

1. На доске были написаны 5 целых чисел - коэффициенты и корни квадратного трёхчлена в каком-то порядке. После того, как одно из них стерли, на доске остались числа 2, 3, 4, -5. Восстановите исчезнувшее число и докажите, что было написано именно оно.

2. Ненулевые числа a, b, c таковы, что $ax^2 + bx + c > cx$ при любом x. Докажите, что $cx^2 - bx + a > cx - b$ при любом x.

3. Даны числа $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Известно, что у каждого из десяти квадратных трехчленов $x^2 - a_1x + a_2, ..., x^2 - a_{10}x + a_1$ не больше одного корня. Докажите, что все числа a_i не превосходят 4.

4. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2 + b^2) \geq f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена отрицательный.

5. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

6. Даны три квадратных трёхчлена $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ с положительными старшими коэффициентами, имеющие по два различных корня. Оказалось, что при подстановке корней трёхчлена $R(x)$ в многочлен $P(x) + Q(x)$ получаются равные значения. Аналогично при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в многочлен $Q(x)+R(x)$ получаются равные значения, а также при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в многочлен $P(x) + R(x)$ получаются равные значения. Докажите, что суммы корней трёхчленов $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ равны между собой.

7. Придумайте для любых трех различных натуральных чисел a, b и c квадратный трехчлен с целыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, принимающий в некоторых целых точках значения a^3, b^3 и c^3.

8. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, ..., a_n$, что квадратный трехчлен $x^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2x + (a_1^4 + a_2^4 + \cdots + a_n^4 + 1)$ имеет по крайней мере один целый корень

Степень вхождения простого

1. а) Выведите формулу для нахождения степени вхождения простого p в n!

б) найдите наименьшее натуральное n такое, что $n!$ заканчивается на 1000 нулей.

2. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

3. Натуральные числа $a, b, n > 1$ таковы, что $(a+b)^n$ делится на ab. Докажите, что a^{n-1} делится на b.

4. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 2016, можно отметить так, чтобы произведение любых двух отмеченных чисел было бы точным квадратом?

5. Каждое из четырех натуральных чисел делится на НОД трех остальных и является делителем НОК трех остальных. Докажите, что произведение этих чисел – полный квадрат.

6. Два игрока по очереди выписывают делители натурального числа N. При этом нельзя повторять те числа, которые уже выписывали ранее, и каждое выписанное число должно быть взаимно просто с числом, которое только что выписал соперник. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

8. Объявим натуральное число b красивым, если для любого натурального a, такого, что a^5 делится на b^2, число a^2 делится на b. Найдите количество красивых натуральных чисел, меньших 2010.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Грехова Д.Д.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *07 июля 2022 г.*

Степень вхождения простого

1. а) Выведите формулу для нахождения степени вхождения простого p в n!

б) найдите наименьшее натуральное n такое, что $n!$ заканчивается на 1000 нулей.

2. Петя выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

3. Натуральные числа $a, b, n > 1$ таковы, что $(a+b)^n$ делится на ab. Докажите, что a^{n-1} делится на b.

4. Какое наибольшее количество натуральных чисел, не превосходящих 2016, можно отметить так, чтобы произведение любых двух отмеченных чисел было бы точным квадратом?

5. Каждое из четырех натуральных чисел делится на НОД трех остальных и является делителем НОК трех остальных. Докажите, что произведение этих чисел – полный квадрат.

6. Два игрока по очереди выписывают делители натурального числа N. При этом нельзя повторять те числа, которые уже выписывали ранее, и каждое выписанное число должно быть взаимно просто с числом, которое только что выписал соперник. Кто выигрывает при правильной игре?

7. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

8. Объявим натуральное число b красивым, если для любого натурального a, такого, что a^5 делится на b^2, число a^2 делится на b. Найдите количество красивых натуральных чисел, меньших 2010.

Индукция

1. В таблице $3 \times n$ расставлены фишки трёх цветов: красного, синего и зелёного. Известно, что фишек каждого цвета ровно n. Разрешается менять местами любые две фишки, находящиеся в одной строке. Докажите, что их можно переставить так, что в каждом столбце будет фишки всех трёх цветов.

2. Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $[x/2]$. Докажите, что если вначале написано число 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число.

3. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трёх разных цветов.

4. Даны $n + 1$ попарно различных натуральных числа, меньших $2n$ ($n > 1$). Докажите, что среди них найдутся три таких числа, что сумма двух из них равна третьему.

5. Доказать, что существует число, состоящее из n единиц или двоек, делящееся на 2^n.

6. Натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ таковы, что каждое не превышает своего номера ($a_k \leqslant k$) и сумма всех чисел – чётное число. Доказать, что одна из сумм $a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ равна нулю.

7. Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя выбрать больше n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку.

8. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

9. Сколькими различными способами можно разбить лестницу размера n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади различны.

10. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Мехралиев А. Р.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *07 июля 2022 г.*

Индукция

1. В таблице $3 \times n$ расставлены фишки трёх цветов: красного, синего и зелёного. Известно, что фишек каждого цвета ровно n. Разрешается менять местами любые две фишки, находящиеся в одной строке. Докажите, что их можно переставить так, что в каждом столбце будет фишки всех трёх цветов.

2. Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $[x/2]$. Докажите, что если вначале написано число 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число.

3. Вершины выпуклого многоугольника раскрашены в три цвета так, что каждый цвет присутствует и никакие две соседние вершины не окрашены в один цвет. Докажите, что многоугольник можно разбить диагоналями на треугольники так, чтобы у каждого треугольника вершины были трёх разных цветов.

4. Даны $n + 1$ попарно различных натуральных числа, меньших $2n$ ($n > 1$). Докажите, что среди них найдутся три таких числа, что сумма двух из них равна третьему.

5. Доказать, что существует число, состоящее из n единиц или двоек, делящееся на 2^n.

6. Натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ таковы, что каждое не превышает своего номера ($a_k \leqslant k$) и сумма всех чисел – чётное число. Доказать, что одна из сумм $a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n$ равна нулю.

7. Докажите, что в выпуклом n-угольнике нельзя выбрать больше n диагоналей так, чтобы любые две из них имели общую точку.

8. Клетки шахматной доски 100×100 раскрашены в 4 цвета таким образом, что в любом квадрате 2×2 все клетки разного цвета. Докажите, что угловые клетки раскрашены в разные цвета.

9. Сколькими различными способами можно разбить лестницу размера n на несколько прямоугольников, стороны которых идут по линиям сетки, а площади различны.

10. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита?

Два факта неевклидовой геометрии

Что есть неевклидова окружность?

Данный раздел предполагает использование геометрических соображений при решении задач. В качестве напоминания: в модели геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости мы отыскали новые виды движений – гомотетию с центром на абсолюте и инверсию относительно окружности с центром на абсолюте.

1. *(Лемма о равных отрезках)* Рассмотрим неевклидовы прямые AB – в виде полуокружности и AB' – в виде вертикального луча. Докажите, что отрезки AB и AB' равны (с точки зрения неевклидовой длины) тогда и только тогда, когда точки B', B, B_∞ лежат на одной евклидовой прямой.

2. *(Два способа построения середины отрезка)* Обоснуйте два способа построения середины отрезка с точки зрения неевклидовой длины:

(a) Рассмотрим неевклидову прямую AB. Проведем евклидову прямую AB до пересечения с абсолютом в точке O. Проведем из точки O касательную к евклидовой полуокружности AB. Тогда точка касания будет неевклидовой серединой отрезка AB;
(b) Рассмотрим неевклидову прямую AB. Проведем евклидовы прямые AA_∞ и BB_∞ до пересечения в точке C. Тогда высота евклидова треугольника $A_\infty B_\infty C$, опущенная из вершины C, пересечет дугу AB в неевклидовой середине отрезка AB.

3. Рассмотрим вертикальный евклидов отрезок AB в верхней полуплоскости. Даны евклидовы длины: $OA = a, OB = b$, где O – точка пересечения AB с абсолютом. Найдите евклидову длину отрезка OX при условии, что X – неевклидова середина отрезка AB.

4. **Теорема.** Неевклидова окружность в модели в верхней полуплоскости совпадает с евклидовой окружностью.

(a) Построим неевклидову окружность Ω_L на диаметре AB (в качестве AB выберем прямую в виде луча, ортогонального абсолюту). Пусть $X \in \Omega_L$. Докажите, что точка X лежит на евклидовой окружности Ω_E, построенной на AB как на диаметре;
(b) Наоборот, пусть $X \in \Omega_E$. Докажите, что $X \in \Omega_L$.

Аналог теоремы Пифагора в геометрии Лобачевского

В данном разделе предлагается использовать некоторые вычисления. Напомним, что расстояние в модели геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости рассчитывается по формуле

$$\rho(A,B) = \left|\ln\left(\frac{BA_\infty}{AA_\infty}\cdot\frac{AB_\infty}{BB_\infty}\right)\right|$$

Оказывается, такую формулу можно преобразовать. Введем обозначения $\alpha = \angle AB_\infty A_\infty$ и $\beta = \angle BB_\infty A_\infty$. Тогда выполнена следующая

Лемма.

$$\rho(A,B) = \left|\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}\right)\right|$$

5. Бильярдная формула. Рассмотрим неевклидов отрезок AB и отметим точку A', симметричную точке A относительно абсолюта. Введем обозначение для евклидовых длин: $AB = r, A'B = r'$. Докажите, что невклидово расстояние можно вычислить по формуле

$$\rho(A,B) = \ln\frac{r'+r}{r'-r}$$

Введем функцию **гиперболический косинус**

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

6. Пусть точки A и B из предыдущей задачи имеют евклидовы координаты $A(x_1; y_1)$ $B(x_2; y_2)$. Используя бильярдную формулу, выразите значение $ch(\rho)$ через координаты x_i y_i

7. Аналог теоремы Пифагора. Рассмотрим прямоугольный треугольник в верхней полуплоскости со сторонами a, b, c (в смысле неевклидовой геометрии). Без ограничения общности будем считать, что катет a лежит на вертикальном луче. Докажите, что имеет место соотношение

$$ch(c) = ch(a)\cdot ch(b)$$

8.* *(для любознательных)* Почему соотношение из предыдущей задачи можно считать аналогом теоремы Пифагора в евклидовой геометрии? Как эти формулы связаны?

Графы 1. Деревья

1. **(a)** Докажите, что в любом дереве есть висячая вершина.
(b) Докажите, что в любом дереве есть две висячих вершины.
(c) В любом ли дереве есть три висячих вершины?

2. В графе все вершины имеют степень пять. Докажите, что в нём есть цикл.

3. *Простой путь* – путь между двумя вершинами графа, ровно один раз проходящий по некоторым его вершинам.
(a) Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одним простым путем.
(b) Докажите, что граф, в котором каждые две вершины соединены ровно одним простым путем, является деревом.

4. *Расстоянием* между вершинами дерева назовём длину в рёбрах простого пути между ними.
(a) Расстояние между некоторыми вершинами A и B дерева равно 11. Рассмотрим вершину C. Пусть расстояние от C до A равно 7. Чему может быть равно расстояние до C до B?
(b) Чему может быть равна разность расстояний от C до A и до B?

5. Пусть Гамма – связный граф, состоящий из n вершин.
(a) Докажите, что в Гамма хотя бы $n-1$ ребро.
(b) Докажите, что если в Гамма ровно $n-1$ ребро, то Гамма является деревом.
(c) Докажите, что если в Гамма больше $n-1$ ребра, то Гамма уже не дерево.

6. В некоторой стране 30 городов, причём каждый соединён с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой?

7. **(a)** Докажите, что вершины любого дерева удастся покрасить в два цвета так, чтобы никакие вершины одного цвета не были соединены ребром.
(b) В каждой вершине дерева записали сумму длин идущих из неё рёбер. Докажите, что вершины удастся разбить на две группы с равной суммой записанных чисел.

8. В компании из 101 человека существует строгая иерархия (нижестоящие подчиняются вышестоящим). Для участия в совещании было решено выбрать несколько работников, ни один из которых не подчиняется другому. Докажите, что в совещании гарантированно смогут поучаствовать 51 человек.

Геометрический разнобой

1. На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону построен параллелограмм $ACDE$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, N и K — середины сторон BC и BA соответственно. Докажите, что прямые DK, EN и BO пересекаются в одной точке.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены медианы AM и высота BH. Угол $MAC = 30°$. Перпендикуляр, проведенный к прямой AM, через точку M, пересекает луч HB в точке K. Докажите, что $AK = BC$.

3. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол DME.

4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. В точке C к этой окружности проведена касательная l. Окружность ω проходит через точки A и B и касается прямой l в точке P. Прямая PB пересекает отрезок CD в точке Q. Найдите отношение $BC : CQ$, если известно, что BD — касательная к окружности ω.

5. Серединный перпендикуляр к биссектрисе BL треугольника ABC пересекает биссектрисы его внешних углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PBQ, касается окружности, описанной около треугольника ABC.

6. Дан треугольник ABC. На внешней биссектрисе угла ABC отмечена точка D, лежащая внутри угла BAC, такая, что $\angle BCD = 60°$. Известно, что $CD = 2AB$. Точка M — середина отрезка BD. Докажите, что треугольник AMC — равнобедренный.

7. Дан треугольник ABC с меньшей стороной AB. На сторонах AB и AC выбраны соответственно точки X и Y так, что $BX = CY$. Под каким углом прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников ABC и AXY, пересекает прямую BC, если $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$?

8. В треугольнике ABC угол C в два раза меньше угла A. Пусть BL — медиана треугольника ABC, CM — биссектриса треугольника LBC. Докажите, что $\angle LMC < 45°$.

Олимпиада

1. Клетчатый квадрат 2007×2007 разбит на квадратики 1×1 и 2×2. Докажите, что найдется строка исходного квадрата, пересекающая нечетное количество квадратиков разбиения.

2. Натуральные числа x и y таковы, что НОД$(x^7, y^4) \cdot$ НОД $(x^8, y^5) = xy$. Докажите, что xy – точный куб.

3. Узлы бесконечной клетчатой решетки покрашены в три цвета (все три цвета присутствуют). Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с разноцветными вершинами в ее узлах (катеты такого треугольника не обязаны идти по линиям сетки).

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A проведены касательные к обеим окружностям, пересекающие их в точках C и D. Окружность, описанная вокруг треугольника BCD, вторично пересекается с этими прямыми в точках E и F. Докажите, что точки E и F равноудалены от прямой AB.

5. В каждой из трех стран расположены по 100 городов. Между некоторыми городами введено регулярное международное авиасообщение. Докажите, что найдутся два города в двух разных странах, для которых в третьей стране есть либо 17 городов, соединенных с каждым из них, либо 17 городов, не соединенных ни с одним из них.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа]

[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *09 июля 2022 г.*

Олимпиада

1. Клетчатый квадрат 2007×2007 разбит на квадратики 1×1 и 2×2. Докажите, что найдется строка исходного квадрата, пересекающая нечетное количество квадратиков разбиения.

2. Натуральные числа x и y таковы, что НОД$(x^7, y^4) \cdot$ НОД $(x^8, y^5) = xy$. Докажите, что xy – точный куб.

3. Узлы бесконечной клетчатой решетки покрашены в три цвета (все три цвета присутствуют). Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с разноцветными вершинами в ее узлах (катеты такого треугольника не обязаны идти по линиям сетки).

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. Из точки A проведены касательные к обеим окружностям, пересекающие их в точках C и D. Окружность, описанная вокруг треугольника BCD, вторично пересекается с этими прямыми в точках E и F. Докажите, что точки E и F равноудалены от прямой AB.

5. В каждой из трех стран расположены по 100 городов. Между некоторыми городами введено регулярное международное авиасообщение. Докажите, что найдутся два города в двух разных странах, для которых в третьей стране есть либо 17 городов, соединенных с каждым из них, либо 17 городов, не соединенных ни с одним из них.

Показатели

1. Даны взаимно простые натуральные числа a и n. Показателем числа a по модулю n называется такое минимальное натуральное число d, что $a^d \equiv 1 (mod n)$.

а) Докажите, что $a^k \equiv 1 (mod n)$ тогда и только тогда, когда k делится на d.

б) Докажите, что $\varphi(n)$ делится на d.

2. Докажите, что при любом четном n число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.

3. Пусть p – простое число. Докажите, что все простые делители числа p^p–1, большие p, дают остаток 1 при делении на p.

4. Пусть p – простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид $2kp + 1$ для некоторого натурального k.

5. Найдите все простые p и q такие, что 2^p–1 делится на q и 2^q–1 делится на p.

6. Докажите,что для любого натурального n число $2^n - 1$ не делится на n.

7. Пусть p – нечетный простой делитель числа $a^{2^n} + 1$. Докажите, что p–1 делится на 2^{n+1}.

8. Известно, что p, q, r – простые числа ($p > 2$), для которых $q^r + 1$ делится на p. Докажите, что либо p–1 делится на $2r$ либо $q^2 - 1$ делится на p.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Грехова Д.Д.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *11 июля 2022 г.*

Показатели

1. Даны взаимно простые натуральные числа a и n. Показателем числа a по модулю n называется такое минимальное натуральное число d, что $a^d \equiv 1 (mod n)$.

а) Докажите, что $a^k \equiv 1 (mod n)$ тогда и только тогда, когда k делится на d.

б) Докажите, что $\varphi(n)$ делится на d.

2. Докажите, что при любом четном n число $2^{n!} - 1$ делится на $n^2 - 1$.

3. Пусть p – простое число. Докажите, что все простые делители числа p^p–1, большие p, дают остаток 1 при делении на p.

4. Пусть p – простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $2^p - 1$ имеет вид $2kp + 1$ для некоторого натурального k.

5. Найдите все простые p и q такие, что 2^p–1 делится на q и 2^q–1 делится на p.

6. Докажите,что для любого натурального n число $2^n - 1$ не делится на n.

7. Пусть p – нечетный простой делитель числа $a^{2^n} + 1$. Докажите, что p–1 делится на 2^{n+1}.

8. Известно, что p, q, r – простые числа ($p > 2$), для которых $q^r + 1$ делится на p. Докажите, что либо p–1 делится на $2r$ либо $q^2 - 1$ делится на p.

Углы в окружности

1. На касательной к описанной окружности треугольника ABC в точке B отмечена точка D. Точки P и Q — основания перпендикуляров из точки D на прямые AB и BC. Докажите, что $PQ \perp AC$.

2. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Прямые AI и CI пересекают высоту BH треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что прямая BI касается описанной окружности треугольника PIQ.

3. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ отмечена такая точка P, что $\angle PAB = \angle CAD$ и $\angle PCB = \angle ACD$. Докажите, что $PB = PD$.

4. Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к обеим проведены касательные, пересекающие окружности в точках M и N. Прямые BM и BN пересекают окружности ещё раз в точках P и Q (P лежит на прямой BM, Q — на прямой BN). Докажите, что отрезки MP и NQ равны.

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках P и Q. Прямая PQ пересекает стороны AB и BC в точках X и Y. Докажите, что $BXIY$ — ромб.

6. Дан остроугольный треугольник ABC. На продолжениях его высот BB_1 и CC_1 за точки B_1 и C_1 выбраны соответственно точки P и Q такие, что угол PAQ — прямой. Пусть AF — высота треугольника APQ. Докажите, что угол BFC — прямой.

7. Дан треугольник ABC. Точки P и Q лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем $AP = CQ$. Отрезки AQ и CP пересекаются в точке O. Пусть L — точка пересечения описанных окружностей треугольников AOP и COQ, отличная от O. Докажите, что L лежит на биссектрисе угла ABC.

8. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, $\angle AMB = 60^\circ$. На сторонах AD и BC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ADK и BCL. Прямая KL пересекает описанную около четырехугольника $ABCD$ окружность в точках P и Q. Докажите, что $PK = LQ$.

Неравенства о средних

Основная идея заключается в использовании следующего соотношения для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\left(\frac{a_1^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}{n}\right)^{-1} \leqslant \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \leqslant \frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}.$$

1. Докажите неравенство для положительных чисел a, b

$$\frac{a}{a^4+b^2}+\frac{b}{a^2+b^4} \leqslant \frac{1}{ab}.$$

2. Докажите неравенство для положительных чисел a, b, c

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c} \geqslant \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

3. Докажите неравенство для a, $b>0$, где $a+b=1$

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

4. Докажите неравенство для положительных чисел a, b, c, d

$$\left(\frac{a+b}{c}\right)^4+\left(\frac{b+c}{d}\right)^4+\left(\frac{c+d}{a}\right)^4+\left(\frac{d+a}{b}\right)^4 \geqslant 64.$$

5. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab+bc+ca=1$. Докажите, что

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geqslant 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$

6. Докажите неравенство для положительных чисел a, b, c

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

7. Найдите максимальное значение выражения при a, b, $c>0$

$$A=\frac{abc(a+b+c)}{\sqrt{(ab)^4+(bc)^4+(ca)^4}}.$$

8. Найдите минимальное значение выражения при a, b, $c>0$ таких, что $a^2+b^2+c^2=3$

$$A=\frac{a^4+b^4}{c^2+4ab}+\frac{b^4+c^4}{a^2+4bc}+\frac{c^4+a^4}{b^2+4ca}$$

Подобие

Параллельность

1. Найдите сторону квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник со сторонами $3, 4, 5$ таким образом, что на катетах лежит по одной его вершине, а на гипотенузе — две.

2. Дан произвольный треугольник ABC с медианами AM и CK. На отрезке AC отмечена произвольная точка N. Точки P и Q на отрезках AB и BC соответственно таковы, что $PN \parallel CK, QN \parallel AM$. Докажите, что отрезок PQ делится медианами AM и CK на три равные части.

3. Точки K, L, M, N на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ образуют еще один квадрат. DK пересекает NM в точке E, а KC пересекает LM в точке F. Докажите, что $EF \parallel AB$.

4. **(a)** Дан произвольный треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 на отрезках BC, AC, AB соответственно таковы, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть l — прямая, проходящая через B параллельно AC. Прямые B_1A_1 и B_1C_1 пересекают l в точках P и Q соответственно. Докажите, что $PB = BQ$.

(b) Точка O лежит на высоте BH треугольника ABC. Луч AO пересекает BC в точке A_1, а луч BO пересекает AC в точке B_1. Докажите, что $\angle A_1HB = \angle C_1HB$.

(c) Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Биссектриса угла ADB пересекает AB в точке C_1, а биссектриса угла BDC пересекает BC в точке A_1. Докажите, что AA_1 и CC_1 пересекаются на отрезке BD.

С поворотом

5. Дан прямоугольник $ABCD$. Через точку B провели две перпендикулярные прямые. Первая прямая пересекает сторону AD в точке K, вторая прямая пересекает продолжение стороны CD в точке L. Пусть F — точка пересечения KL и AC. Докажите, что $BF \perp KL$.

6. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки K и L соответственно, причем $AK = BL$. Точка P такова, что четырехугольник $PKLB$ — равнобедренная трапеция с основаниями KL и PB. Докажите, что P лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Пусть P — произвольная точка на ω, а h_1, h_2, h_3, h_4 — длины перпендикуляров из точки P на прямые

AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $h_1 h_3 = h_2 h_4$.

Индукция в графах

1. а) В стране между любыми двумя городами существует либо авиационный, либо железнодорожный маршрут. Докажите, что можно запретить один вид транспорта так, чтобы, пользуясь оставшимся, из любого города можно было добраться до любого.

б) В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

2. а) Докажите,что существует граф с $2n$ вершинами,степени которых равны

$1, 1, 2, 2, ..., n, n$.

б) Пусть n человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом n.

в) Даны n натуральных чисел, сумма которых равна $2n-2$. Докажите, что существует граф с n вершинами, у которого степени равны этим числам.

3. а) В компании из n человек среди любых четверых есть знакомый с остальными тремя. Доказать, что есть человек, который знает всех остальных.

б) В компании из $2n + 1$ человека для любых n людей найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

4. а) В графе с $2n$ вершинами $n^2 + 1$ ребро. Докажите, что в нем есть треугольник.

б) В однокруговом турнире по теннису участвовало 16 игроков. После того, как сыграли n партий, выяснилось, что среди любых трех спортсменов найдутся двое, уже сыгравшие между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Грехова Д.Д.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *12 июля 2022 г.*

Индукция в графах

1. а) В стране между любыми двумя городами существует либо авиационный, либо железнодорожный маршрут. Докажите, что можно запретить один вид транспорта так, чтобы, пользуясь оставшимся, из любого города можно было добраться до любого.

б) В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

2. а) Докажите,что существует граф с $2n$ вершинами,степени которых равны

$1, 1, 2, 2, ..., n, n$.

б) Пусть n человек не знакомы между собой. Нужно так познакомить друг с другом некоторых из них, чтобы ни у каких трёх людей не оказалось одинакового числа знакомых. Докажите, что это можно сделать при любом n.

в) Даны n натуральных чисел, сумма которых равна $2n-2$. Докажите, что существует граф с n вершинами, у которого степени равны этим числам.

3. а) В компании из n человек среди любых четверых есть знакомый с остальными тремя. Доказать, что есть человек, который знает всех остальных.

б) В компании из $2n + 1$ человека для любых n людей найдётся отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.

4. а) В графе с $2n$ вершинами $n^2 + 1$ ребро. Докажите, что в нем есть треугольник.

б) В однокруговом турнире по теннису участвовало 16 игроков. После того, как сыграли n партий, выяснилось, что среди любых трех спортсменов найдутся двое, уже сыгравшие между собой. При каком наименьшем n такое возможно?

Последовательности 1

Периодичность

1. Последовательность такова, что $a_n = n^2$ при $1 \leqslant n \leqslant 5$, и при всех натуральных числах n выполнено равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2022}.

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ последовательность действительных чисел. Известно, что $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$. Выясните, чему может быть равно a_{2014}?

3. Первый член последовательности равен 934. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Найдите 2013-й член последовательности.

4. Последовательность x_n определена следующими условиями: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Существует ли такое натуральное число k, что ни один из членов последовательности x_n не делится на k?

Индукция

5. На доске написано число, большее 1. Каждую минуту Лена делит написанное на доске число на его дробную часть и записывает на доску вместо старого. Докажите, что когда-нибудь на доске появится либо целое число, либо число, большее 20212022. (Напомним, что дробная x — это разность между x и наибольшим целым числом, не превосходящим x.)

6. Возьмем k натуральное число. Пусть $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots a_k = k$. Пусть $a_i = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{i-1}^2$ для всех $i > k$. Докажите, что число a_{k+100} имеет хотя 100 различных простых делителей.

7. Последовательность a_n определена, как $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n}$ при $n \leq 1$. Докажите, что $a_n < 2$ при $n \leq 1$.

[Летняя школа Лицея «Вторая школа»] Мехралиев А. Р.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *13 июля 2022 г.*

Последовательности 1

Периодичность

1. Последовательность такова, что $a_n = n^2$ при $1 \leqslant n \leqslant 5$, и при всех натуральных числах n выполнено равенство $a_{n+5} + a_{n+1} = a_{n+4} + a_n$. Найдите a_{2022}.

2. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ последовательность действительных чисел. Известно, что $a_{n+1} = a_n a_{n+2}$. Выясните, чему может быть равно a_{2014}?

3. Первый член последовательности равен 934. Каждый следующий равен сумме цифр предыдущего, умноженной на 13. Найдите 2013-й член последовательности.

4. Последовательность x_n определена следующими условиями: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; $x_{n+3} = x_n + x_{n+1}x_{n+2}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Существует ли такое натуральное число k, что ни один из членов последовательности x_n не делится на k?

Индукция

5. На доске написано число, большее 1. Каждую минуту Лена делит написанное на доске число на его дробную часть и записывает на доску вместо старого. Докажите, что когда-нибудь на доске появится либо целое число, либо число, большее 20212022. (Напомним, что дробная x — это разность между x и наибольшим целым числом, не превосходящим x.)

6. Возьмем k натуральное число. Пусть $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots a_k = k$. Пусть $a_i = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{i-1}^2$ для всех $i > k$. Докажите, что число a_{k+100} имеет хотя 100 различных простых делителей.

7. Последовательность a_n определена, как $a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n}$ при $n \leq 1$. Докажите, что $a_n < 2$ при $n \leq 1$.

Асимптотика

- Плоскость разбита на равные многоугольники, внутри каждого из которых одна целая точка, а на границе точек нет. Докажите, что площадь многоугольников равна 1.
- Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали прямоугольник (со сторонами, параллельными линиям клеток).

1. Докажите, что существует число, большее 10^{2022}, которые нельзя представить в виде суммы куба и квадрата.

2. Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.

3. Существует ли квадратный трёхчлен, все значения которого в натуральных точках — степени двойки?

4. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).

5. Петя и Вася играют по очереди закрашивают клетки бесконечной белой клетчатой плоскости. За один ход Петя закрашивает 11 клеток зелёным, а Вася —– 10 клеток красным. Перекрашивать клетки нельзя. Петя хочет нарисовать полностью зелёный квадрат 10×10. Сможет ли Вася ему помешать?

6. Мордор каждый год присоединяет к себе по одному городу (изначально в Мордоре один город) и проводит дороги из всех старых городов в новый. За год партизан Арагорн может разрушить не более 100 дорог. Докажите, что как бы он ни старался, в Мордоре когда-нибудь найдутся 1000 городов, попарно соединённых дорогами.

7. Существует ли отображение из некоторого трёхмерного шара в некоторый плоский круг, для каждой пары точек не уменьшающее расстояние между ними?

8. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшиеся обойти конем (побывав на каждой по одному разу)?

Асимптотика

- Плоскость разбита на равные многоугольники, внутри каждого из которых одна целая точка, а на границе точек нет. Докажите, что площадь многоугольников равна 1.
- Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали прямоугольник (со сторонами, параллельными линиям клеток).

1. Докажите, что существует число, большее 10^{2022}, которые нельзя представить в виде суммы куба и квадрата.

2. Докажите, что при некотором натуральном N уравнение $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = N$ имеет не менее миллиона решений в натуральных числах.

3. Существует ли квадратный трёхчлен, все значения которого в натуральных точках — степени двойки?

4. Двое игроков ставят крестики и нолики на бесконечной клетчатой бумаге, причём на каждый крестик первого игрока второй отвечает 100 ноликами. Докажите, что первый может добиться, чтобы некоторые четыре крестика образовали квадрат (со сторонами, параллельными линиям клеток).

5. Петя и Вася играют по очереди закрашивают клетки бесконечной белой клетчатой плоскости. За один ход Петя закрашивает 11 клеток зелёным, а Вася —– 10 клеток красным. Перекрашивать клетки нельзя. Петя хочет нарисовать полностью зелёный квадрат 10×10. Сможет ли Вася ему помешать?

6. Мордор каждый год присоединяет к себе по одному городу (изначально в Мордоре один город) и проводит дороги из всех старых городов в новый. За год партизан Арагорн может разрушить не более 100 дорог. Докажите, что как бы он ни старался, в Мордоре когда-нибудь найдутся 1000 городов, попарно соединённых дорогами.

7. Существует ли отображение из некоторого трёхмерного шара в некоторый плоский круг, для каждой пары точек не уменьшающее расстояние между ними?

8. Из клетчатой плоскости выбросили все клетки, обе координаты которых делятся на 100. Можно ли оставшиеся обойти конем (побывав на каждой по одному разу)?

Подобие в окружности. Степень точки. Радикальная ось

Подобие в окружности & степень точки

1. На окружности отмечены точки A и B, а также середина одной из дуг AB. Прямая l, проходящая через M, пересекает окружность вторично в точке C, а отрезок AB в точке D. Докажите, что произведение $MC \cdot MD$ не зависит от выбора l.

2. AB — диаметр окружности, CD — хорда этой окружности. Перпендикуляры к хорде, проведенные через ее концы C и D, пересекают прямую AB в точках K и M. Докажите, что $AK = BM$.

3. Точки A, B, C, D лежат на окружности ω. Касательные к ω в точках A и B пересекаются в точке P, а касательные в точках C и D пересекаются в точке Q. Докажите, что точки P, Q и середины отрезков AB и CD лежат на одной окружности.

4. Вписанный четырехугольник $ABCD$ таков, что касательные к его вершинам в точках A и C пересекаются на прямой BD. Докажите, что тогда касательные к его вершинам в точках B и D пересекаются на прямой AC.

Радикальная ось

5. Точка C лежит на окружности ω с диаметром AB. Точка H — основание перпендикуляра из точки C на AB. Окружность с центром C и радиусом CH пересекает ω в точках P и Q. Докажите, что PQ делит CH пополам.

6. Точки M и N лежат соответственно на сторонах AC и AB треугольника ABC. На отрезках BM и CN как на диаметрах построены окружности. Докажите, что их радикальная ось проходит через ортоцентр треугольника ABC.

7. К непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены две общие внешние касательные. Первая касается окружности ω_1 в точке A, а вторая касается окружности ω_2 в точке B. Прямая AB пересекает вторично окружность ω_1 в точке K, а окружность ω_2 в точке L. Докажите, что $AK = BL$.

8. В четырехугольнике $ABCD$ углы A и C — прямые. На сторонах AB и CD как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках X и Y. Докажите, что прямая XY проходит через середину диагонали AC.

Метод Штурма

Метод Штурма обычно используется для доказательства неравенств с несколькими переменными. Основная его идея заключается в следующем: менять одновременно две переменные, сохраняя их сумму (или произведение) так, чтобы при этом одна из частей неравенства всегда изменялась в одну сторону. Обычно переменные либо пытаются сделать равными, либо наоборот — раздвинуть как можно дальше друг от друга.

(1) Если произведение $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ равно 1, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

(2) Если сумма чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равна 1, то $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant \dfrac{1}{n}$.

1. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, таких, что $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, докажите неравенство

$$(1 + x_1)(1 + x_2)\ldots(1 + x_n) \geqslant 2^n.$$

2. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ докажите неравенства между средними:

$$\left(\frac{x_1^{-1} + \ldots + x_n^{-1}}{n}\right)^{-1} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}.$$

3. Для положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, таких, что $x_1 + \ldots + x_n = 1$, докажите неравенство

$$\frac{(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n)}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqslant (n - 1)^n.$$

4. Докажите неравенство для $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 1$ при $n \geqslant 2$

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \ldots \frac{1}{1 + x_n} \geqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}.$$

5. Докажите неравенство для $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$ при $n \geqslant 2$

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \ldots \frac{1}{1 + x_n} \leqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}}.$$

6. Докажите неравенство для $a, b, c, d > 0$, таких, что $a + b + c + d = 1$

$$abc + bcd + cda + dab \leqslant \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd.$$

7. Среди треугольников с углами, не превышающими $75°$, которе вписаны в данную окружность, найдите тот, периметр которого

(a) является наибольшим;

(b) является наименьшим.

Информатикация

- Витя загадал натуральное число от 1 до 16. Лёша может задавать Вите вопросы, на которые Витя будет отвечать ”Да” или ”Нет”. За какое наименьшее число вопросов Лёша сможет угадать загаданное Витей число?

1. Данил провёл невидимыми чернилами прямую. Андрей может отметить любую точку и Данил скажет ему расстояние от этой точки до своей прямой. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно услышать ответ 0?

2. В орфографическом словаре 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Лёша открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой странице. Витя хочет угадать это слово, задавая вопросы, на которые Лёша отвечает ”Да” или ”Нет”. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

3. Лёша загадывает клетку доски $N \times N$. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Лёши, попала ли в него загаданная клетка.
(a) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 8$?
(b) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 5$?

4. Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора, если:
(a) веса гирь набора все целые, **(b)** веса не обязательно целые?

5. $4n - 1$ школьник расселись по кругу за стол, после чего каждому был надет колпак одного из двух цветов, причем школьники знают, что колпаков одного из цветов на один больше чем другого(но заранее не было оглашено, какой из цветов преобладает). Каждый школьник видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все школьники должны одновременно огласить цвет своего колпака. Смогут ли школьники заранее договориться так, чтобы не менее чем $3n - 1$ из них дали правильные ответы?

6. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$; **(c)** $k = 13$?

Информатикация

- Витя загадал натуральное число от 1 до 16. Лёша может задавать Вите вопросы, на которые Витя будет отвечать ”Да” или ”Нет”. За какое наименьшее число вопросов Лёша сможет угадать загаданное Витей число?

1. Данил провёл невидимыми чернилами прямую. Андрей может отметить любую точку и Данил скажет ему расстояние от этой точки до своей прямой. За какое наименьшее количество вопросов можно гарантированно услышать ответ 0?

2. В орфографическом словаре 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Лёша открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой странице. Витя хочет угадать это слово, задавая вопросы, на которые Лёша отвечает ”Да” или ”Нет”. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

3. Лёша загадывает клетку доски $N \times N$. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Лёши, попала ли в него загаданная клетка.
(a) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 8$?
(b) За какое наименьшее количество ходов Витя может узнать клетку, если $N = 5$?

4. Имеется набор из 20 гирь, с помощью которых можно взвесить любой целый вес от 1 до 1997 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес – на другую). Каков минимально возможный вес самой тяжелой гири такого набора, если:
(a) веса гирь набора все целые, **(b)** веса не обязательно целые?

5. $4n - 1$ школьник расселись по кругу за стол, после чего каждому был надет колпак одного из двух цветов, причем школьники знают, что колпаков одного из цветов на один больше чем другого(но заранее не было оглашено, какой из цветов преобладает). Каждый школьник видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все школьники должны одновременно огласить цвет своего колпака. Смогут ли школьники заранее договориться так, чтобы не менее чем $3n - 1$ из них дали правильные ответы?

6. Имеются двухчашечные весы и k монет, из которых ровно одна фальшивая, которая отличается по весу от настоящих. Можно ли за три взвешивания определить, какая из монет фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее настоящей, если **(a)** $k = 14$; **(b)** $k = 12$; **(c)** $k = 13$?

Изогональное сопряжение

1. Докажите, что ортоцентр и центр описанной окружности изогонально сопряжены.

2. **(a)** Лучи AP и AQ изогональны относительно угла BAC, P_1 и Q_1 — их проекции на прямую AB, P_2 и Q_2 — на прямую AC. Докажите, что точки P_1, P_2, Q_1, Q_2 лежат на одной окружности.

(b) Дан треугольник ABC. На стороне BC отмечены точки A_1, A_2, на стороне AC — B_1, B_2, на стороне AB — C_1, C_2. Известно, что четырехугольники $A_1A_2B_1B_2, B_1B_2C_1C_2$ и $C_1C_2A_1A_2$ вписанные. Докажите, что все 6 отмеченных точек лежат на одной окружности. *Указание:* используйте радикальную ось.

(c) *Педальной окружностью* точки P в треугольнике ABC называется описанная окружность треугольника, образованного основаниями перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника ABC. Докажите, что педальные окружности изогонально сопряженных точек совпадают.

3. **(a)** Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках A и C пересекаются в точке P. Докажите, что прямая BP изогональна медиане BM треугольника ABC.

(b) Диагонали параллелограмма $ABCD$ (отличного от прямоугольника) пересекаются в точке M. Докажите, что точка M, а также основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые BC, CA и AB лежат на одной окружности.

4. **(a)** Что происходит с точкой описанной окружности при изогональном сопряжении?

(b) В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O — точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD взята точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.

Последовательности 2

1. Имеется $4n$ положительных чисел, таких, что из любых четырёх попарно различных можно составить геометрическую прогрессию. Доказать, что среди этих чисел найдется n одинаковых.

2. По целому числу построим последовательность $a_1 = a, a_2 = 1 + a_1, a_3 = 1+a_1a_2, \ldots$ (каждое следующее число на один больше произведения предыдущих). Докажите, что разности её соседних членов $a_{n+1} - a_n$ — точные квадраты.

3. Дано некоторое натуральное число d. Пусть $a_1 = 1, a_2 = a_1+d, \ldots a_n = a_1+d(n-1)$. Докажите, что найдется член последовательности, в десятичной записи которого есть 1000000 троек подряд.

4. Последовательность определяется так: первые её члены — 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1. Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.

5. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1, a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

6. Найдите x_{1000}, если $x_1 = 4, x_2 = 6$ и при любом натуральном $n \geqslant 3$ очередной член последовательности x_n — это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

7. Последовательность натуральных чисел такова, что для любых различных i, j выполняется НОД(a_i, a_j) = НОД(i, ,j). Докажите, что для всех номеров $a_i = i$.

[Летняя школа Лицея «Вторая школа»] Мехралиев А. Р.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *15 июля 2022 г.*

Последовательности 2

1. Имеется $4n$ положительных чисел, таких, что из любых четырёх попарно различных можно составить геометрическую прогрессию. Доказать, что среди этих чисел найдется n одинаковых.

2. По целому числу построим последовательность $a_1 = a, a_2 = 1 + a_1, a_3 = 1+a_1a_2, \ldots$ (каждое следующее число на один больше произведения предыдущих). Докажите, что разности её соседних членов $a_{n+1} - a_n$ — точные квадраты.

3. Дано некоторое натуральное число d. Пусть $a_1 = 1, a_2 = a_1+d, \ldots a_n = a_1+d(n-1)$. Докажите, что найдется член последовательности, в десятичной записи которого есть 1000000 троек подряд.

4. Последовательность определяется так: первые её члены — 1, 2, 3, 4, 5. Далее каждый следующий (начиная с 6-го) равен произведению всех предыдущих членов минус 1. Докажите, что сумма квадратов первых 70 членов последовательности равна их произведению.

5. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1, a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

6. Найдите x_{1000}, если $x_1 = 4, x_2 = 6$ и при любом натуральном $n \geqslant 3$ очередной член последовательности x_n — это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$.

7. Последовательность натуральных чисел такова, что для любых различных i, j выполняется НОД(a_i, a_j) = НОД(i, ,j). Докажите, что для всех номеров $a_i = i$.

Олимпиада

1. Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет два различных ненулевых целых корня a и b. Известно, что $a + p$ делится на $q - 2b$. Чему может быть равно число a? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

2. Вершины выпуклого многоугольника покрашены минимум в 3 цвета так, что любые две соседние покрашены в разные цвета. Докажите, что можно разрезать многоугольник на треугольники непересекающимися диагоналями так, чтобы и диагонали имели концы разных цветов.

3. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

4. В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AA_1. Перпендикуляр из A_1 на AC пересекает «меньшую» дугу AC описанной окружности Ω треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из A на BK пересекает BC в точке L. Докажите, что точки K, L и середина «меньшей» дуги BC окружности Ω лежат на одной прямой.

5. В стране между некоторыми парами городов установлено одностороннее беспосадочное авиасообщение. Два вредителя хотят добиться того, чтобы, вылетев из любого города, нельзя было вернуться в него. Первый вредитель умел закрывать рейсы. Он выяснил. что можно закрыть 1000 рейсов, добившись требуемого, но меньшего числа рейсов недостаточно; однако до начала действий его обнаружили и обезвредили. Второй вредитель умеет разворачивать направления рейсов. Какого минимального количества разворачиваний ему гарантированно хватит?

Олимпиада

1. Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет два различных ненулевых целых корня a и b. Известно, что $a + p$ делится на $q - 2b$. Чему может быть равно число a? (Приведите все ответы и докажите, что других нет.)

2. Вершины выпуклого многоугольника покрашены минимум в 3 цвета так, что любые две соседние покрашены в разные цвета. Докажите, что можно разрезать многоугольник на треугольники непересекающимися диагоналями так, чтобы и диагонали имели концы разных цветов.

3. Петя выбрал 10 последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел оканчиваться на 2016?

4. В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AA_1. Перпендикуляр из A_1 на AC пересекает «меньшую» дугу AC описанной окружности Ω треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из A на BK пересекает BC в точке L. Докажите, что точки K, L и середина «меньшей» дуги BC окружности Ω лежат на одной прямой.

5. В стране между некоторыми парами городов установлено одностороннее беспосадочное авиасообщение. Два вредителя хотят добиться того, чтобы, вылетев из любого города, нельзя было вернуться в него. Первый вредитель умел закрывать рейсы. Он выяснил. что можно закрыть 1000 рейсов, добившись требуемого, но меньшего числа рейсов недостаточно; однако до начала действий его обнаружили и обезвредили. Второй вредитель умеет разворачивать направления рейсов. Какого минимального количества разворачиваний ему гарантированно хватит?

Техномагия

Полезные идеи:

- Преобразование сумм.
- Разложение на множители.
- Замены.
- Разные полезные неравенства.

1. Сравните числа A и B

$$A = \frac{3}{(1\cdot 2)^2} + \frac{5}{(2\cdot 3)^2} + \ldots + \frac{87}{(43\cdot 44)^2} + \frac{89}{(44\cdot 45)^2}, \quad B = \frac{\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}+1}}{\sqrt[3]{2}}$$

2. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями уравнения

$$a\,\mathrm{tg}^3 x + \left(2-a-a^2\right)\mathrm{tg}^2 x + \left(a^2-2a-2\right)\mathrm{tg}\, x + 2a = 0$$

принадлежащими интервалу $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2+5xy-2x^2-17y-6x+20=0 \\ 10y^2-2xy+5x^2-38y-6x+41=0 \end{cases}$$

4. Найдите все такие y, для которых существуют положительные x_1, x_2, x_3, x_4, что

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 5-\sqrt{y+1}$$

и

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4} = 4-\sqrt{y}.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$$

6. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$

7. Для положительных чисел a, b, c выполнено равенство

$$2a^3b+2b^3c+2c^3a = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

Докажите неравенство

$$2ab(a-b)^2+2bc(b-c)^2+2ca(c-a)^2 \geqslant (ab+bc+ca)^2$$

8. Найдите наибольшее такое $s>0$, что для любых положительных чисел a, b, c выполняется неравенство

$$\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)^2 \geqslant s\left(\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\right)$$

Ещё об ортоцентре

1. Точка, симметричная ортоцентру относительно

(a) стороны **(b)** середины стороны

треугольника ABC лежит на его описанной окружности.

Пусть в треугольнике ABC точка M — середина стороны AC, H — ортоцентр, H_a, H_c — основания высот из вершин A и C соответственно. Обозначим через P точку пересечения описанных окружностей треугольников ABC и H_aBH_c, отличную от B.

2. **(a)** Точка P лежит на прямой MH.

(b) Описанные окружности треугольников AMH_a и CMH_c проходят через P.

(c) Прямая PM — биссектриса углов APH_a и CPH_c.

3. **(a)** Прямые AC, H_aH_c, BP пересекаются в одной точке S.

(b) $SH \perp BM$.

(c) Пусть K — точка, симметричная H относительно AC. Докажите, что точки M, K, S, B лежат на одной окружности.

Пусть Q — проекция H на BM.

4. Точки A, C, H, Q лежат на одной окружности.

5. $\angle QAC = \angle QBA, \angle QCA = \angle QBC$.

6. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Описанная окружность треугольника ABH пересекает окружность, построенную на отрезке AC как на диаметре, в точке $K \neq A$. Докажите, что прямая CK делит отрезок BH пополам.

Много-мало

1. Может ли и сумма, и произведение нескольких натуральных чисел быть равными 99?

2. Площадь прямоугольника меньше 1 дм^2. Может ли его периметр быть больше 1 км?

3. На занятии Платон, Юля и Саша решили все задачи. Может ли оказаться, что Саша большинство задач решил раньше Юли, Юля — большинство раньше Платона, а Платон — большинство раньше Саши?

4. Можно ли в квадрат со стороной 1 поместить несколько неперекрывающихся квадратов с суммой периметров 100?

5. На выпускном вечере было юношей и девушек поровну. В конце вечера оказалось, что было 10 танцев и каждый раз танцевали все.

(a) Как могло получиться, что каждый юноша каждый следующий танец танцевал либо с более красивой, либо с более умной девушкой?

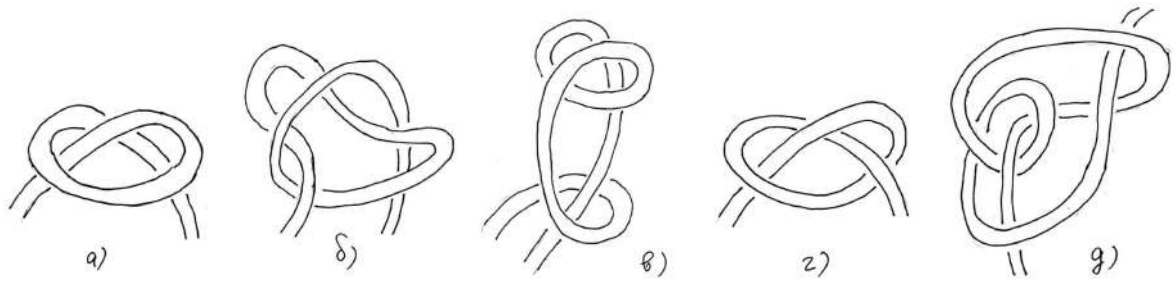
(b) Как могло получиться, что в дополнение к тому в каждом танце (начиная со второго) был юноша, который танцевал и с более красивой, и с более умной девушкой?

6. Раз в месяц директор Яндекса предлагает трем своим заместителям проголосовать за новый список своей и их зарплат. Сам директор не голосует. Те заместители, чью зарплату предлагается увеличить, голосуют за, остальные — против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли директор за год добиться, чтобы его зарплата вдесятеро увеличилась, а зарплаты всех заместителей вдесятеро уменьшились?

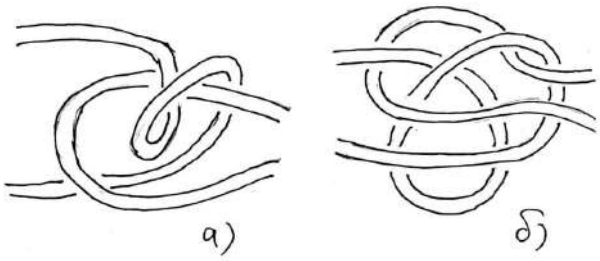
7. В однокруговом футбольном турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков.«Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

Конструкции. Добавка

1. (a) Кусок верёвки лежит на столе согласно рисунку. Завяжется ли узел, если потянуть за концы?



(b) Два куска верёвки лежат на столе согласно рисунку. Зацепятся ли они, если потянуть одной рукой за концы первой верёвки и другой рукой — за концы второй верёвки?



2. Концы верёвки соединены. Можно ли повесить её на два гвоздя так, чтобы она не падала, если за неё потянуть? А можно ли сделать так, чтобы при вытаскивании любого гвоздя верёвка упала?

3. Можно ли соединить (a) 3 резиновых кольца; (b*) 5 резиновых колец так, чтобы их нельзя было расцепить, но при разрезании любого из них они бы расцеплялись?

4. *Вам понадобятся бумага и ножницы.* Склейте из полоски бумаги ленту Мёбиуса.

(a) Разрежьте лист Мёбиуса по «средней» линии, равноудалённой от его краёв. Сколько получится частей?

(b) Перед склеиванием листа Мёбиуса проведите на нём а) две линии; б) n линий параллельно краям. Разрежьте лист Мёбиуса по этим линиям. Сколько получится частей?

Разнобой

1. 26 учеников пронумерованы в классном журнале числами от 1 до 26. Каждый из них заявил:«Каждый, у кого номер имеет с мои общий делитель, больший 1, иногда врёт». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

2. В классе организовали несколько кружков. В каждый кружок ходит ровно 9 учеников, а каждый ученик — ровно в 2 кружка. Оказалось, что для любых двух кружков есть ровно один ученик, который ходит в оба эти кружка. Сколько детей посещают кружки?

3. Митя и Андрей делили одно и то же число с остатком. Митя на 8, Андрей — на 9. Неполное частное, которое получил Митя, в сумме с остатком от деления, который получил Андрей, дали 13. Какой остаток при делении получился у Мити?

4. У каждого двузначного числа нашли произведение цифр, потом у каждого такого произведения подсчитали сумму цифр. Найдите наибольшее значение среди всех таких сумм.

5. Положительные числа a и b таковы, что сумма дробей

$$\frac{a+1}{b+1}, \frac{a+2}{b+2}, \ldots, \frac{a+2022}{b+2022}$$

равна 2022. Найдите произведение этих дробей.

6. Найдите все пары натуральных чисел (a, b), для которых выполняется равенство НОК (a, b) — НОД $(a, b) = ab/5$.

7. Даны три нецелых числа. Известно, что сумма любых двух из них целая. Может ли произведение всех трех чисел быть целым числом?

8.* Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что

$$\text{НОД } (a, b) + \text{НОК } (a, b) = ab/2.$$

Графские наследники

1. Найдите наибольшее число ребер в графах с p вершинами без циклов (т. е. для наследственного свойства отсутствия циклов в графе). Опишите все экстремальные графы для наследственного свойства отсутствия циклов.
2. Приведите пример графа, на котором достигается оценка из теоремы про $ex(p, K_3)$
3. Приведите пример графа, на котором достигается оценка из теоремы Турана.
4. Докажите непланарность K_5.
5. Докажите непланарность $K_{3,3}$.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Седов Г.К.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *22.07.2022*

Графские наследники

1. Найдите наибольшее число ребер в графах с p вершинами без циклов (т. е. для наследственного свойства отсутствия циклов в графе). Опишите все экстремальные графы для наследственного свойства отсутствия циклов.
2. Приведите пример графа, на котором достигается оценка из теоремы про $ex(p, K_3)$
3. Приведите пример графа, на котором достигается оценка из теоремы Турана.
4. Докажите непланарность K_5.
5. Докажите непланарность $K_{3,3}$.

[Лицей «Вторая школа», Летняя школа] Седов Г.К.
[*июль 2022 г.*] группа: 9-10-2 *22.07.2022*

Графские наследники

1. Найдите наибольшее число ребер в графах с p вершинами без циклов (т. е. для наследственного свойства отсутствия циклов в графе). Опишите все экстремальные графы для наследственного свойства отсутствия циклов.
2. Приведите пример графа, на котором достигается оценка из теоремы про $ex(p, K_3)$
3. Приведите пример графа, на котором достигается оценка из теоремы Турана.
4. Докажите непланарность K_5.
5. Докажите непланарность $K_{3,3}$.